

Статья

Слияния Сознания

 Дональд Д. Хоффман¹, Четан Пракаш^{2,3}  и Роберт Прентнер^{3,4,*} 

- 1 Департамент когнитивных наук, Калифорнийский университет, Ирвайн, Калифорния 92697, США
 2 Факультет математики, Калифорнийский государственный университет, Сан-Бернадино, Калифорния 92407, Ассоциация США по математической науке о сознании, D-80539 Мюнхен, Германия Мюнхенский центр математической философии, LMU Мюнхен, D-80539 Мюнхен, Германия
 * Адрес для переписки: robert.prentner@amcs.science .

Абстрактный: Что такое сознательный опыт? Могут ли они объединиться, чтобы сформировать новый опыт? Что такое сознательные субъекты? Могут ли они объединиться, чтобы сформировать новые предметы? Большинство попыток ответить на эти вопросы предполагают, что пространство-время и некоторые его частицы являются фундаментальными. Однако физики говорят нам, что пространство-время не может быть фундаментальным. Они говорят, что пространство-время обречено. Мы прислушиваемся к мнению физиков и отказываемся от предположения, что пространство-время является фундаментальным. Вместо этого мы предполагаем, что субъекты и опыт — это сущности за пределами пространства-времени, а не внутри пространства-времени. Мы уточняем это в математической теории *сознательные агенты*, динамика которого описывается цепями Маркова. Мы показываем, как (1) агенты объединяются в более сложные агенты, (2) агенты сливаются в более простые агенты и (3) квалиа сливаются, создавая новые квалиа. Возможная динамика агентов образуют $(n-1)$ -мерный многогранник с n вершины — *Марковский многогранник* M_n . Полное слияние агентов и квалиа образуют $(n-1)$ -мерный симплекс — *симплекс слияния* Φ_n . Чтобы спроецировать марковскую динамику сознательных агентов на процессы рассеяния в пространстве-времени, мы определяем новую карту цепей Маркова с декорированными перестановками. Такие перестановки — наряду со спиральностью или массой и спином — инвариантно кодируют всю физическую информацию, используемую для вычисления амплитуд рассеяния. Мы предполагаем, что пространство-время и процессы рассеяния представляют собой структуру данных, которая кодирует взаимодействия сознательных агентов: частица в пространстве-времени является проекцией марковской динамики общающегося класса сознательных агентов.

Ключевые слова: сознание; квалиа; субъективный опыт; трудная проблема сознания; панпсихизм; проблема комбинирования; сознательные агенты; интерфейсная теория восприятия; декорированные перестановки; амплитуды; положительный грассманиан; цепи Маркова; марковские многогранники; симплекс слияния



Цитата: Хоффман, Д.Д.; Пракаш, К.; Прентнер, Р. Слияния

Сознание. *Энтропия* **2023** год, *25*, 129.

<https://doi.org/10.3390/e25010129>.

Поступила: 24 ноября 2022 г.

Отредактирована: 2 января 2023 г.

Принята: 3 января 2023 г.

Опубликована: 9 января 2023 г.



Авторские права: © 2023 авторы. Лицензиат MDPI, Базель, Швейцария. Эта статья находится в открытом доступе и распространяется на условиях лицензии Creative Commons Attribution (CC BY) (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>).

1. Введение

Сознание сбивает с толку даже опытных исследователей. Свидетельством тому является недавнее множество противоречивых теорий [1]. Даже их основные идеи противоречат друг другу: квантовые состояния нейронных микротрубочек [2–4], причинно-следственные архитектуры, интегрирующие информацию [5–8], глобальные рабочие пространства нейронов [9–12], пользовательские иллюзии и схемы внимания [13–15], панпсихизм [16,17], и различные формы дуализма [18,19]. Однако большинство этих теорий сознания сходятся в одном ключевом предположении: пространство-время и некоторые его частицы фундаментальны, то есть онтологически примитивны, нередуцируемы и невозникают. Например, физикалистские теории предполагают именно это и ничего более, в то время как многие панпсихисты также предполагают это, но добавляют, что «внутренняя природа» [20] таких частиц есть не что иное, как сознание.

Естественно предположить, что пространство-время фундаментально. Действительно, можно возразить, что любая теория должна предполагать это, чтобы уважать некоторую разновидность натурализма [21]. Так зачем же на это указывать? Потому что пространство-время и его частицы обречены, как фундаментальное положение любой теории реальности. Об этом говорят современные исследования в области физики. Рисуем, в разделе 2, как взаимодействие гравитации и квантовой теории приводит физиков к этому ошеломляющему выводу.

Примечательно, что эволюция путем естественного отбора соглашается: пространство-время и объекты не являются фундаментальными. Мы объясняем в разделе 3, как эволюционные игры показывают, что наше восприятие пространства, времени и объектов — это не более чем пользовательский интерфейс, управляющий адаптивными действиями.

Интерфейс? К чему? И физика, и эволюционная теория молчат. Мы предлагаем в разделе 4, что сознательные агенты фундаментальны. Некоторые агенты взаимодействуют с другими через интерфейс, формат которого — пространство-время, и объекты, расположенные в пространстве-времени. Мы предлагаем точное определение сознательного агента.

Что происходит, когда агенты взаимодействуют? Мы демонстрируем в разделе 5, что они могут объединиться в сложный агент или слиться в более простой агент с новым сознательным опытом. Если агенты взаимодействуют, их возможные комбинации образуют $(n-1)$ -мерный многогранник n -вершины — Марковский многогранник M_n . Их возможные слияния образуют $(n-1)$ -мерный симплекс — симплекс слияния F_n .

Если агенты фундаментальны, а пространство-время является их интерфейсом, то как именно агенты создают пространственно-временной интерфейс? Так получилось, что физики-теоретики недавно заглянули за пределы пространства-времени и открыли новые структуры за пределами пространства-времени, такие как амплитуды [22] и космологический многогранник [23]. Они генерируют пространство-время и квантовую теорию посредством проекции. Сущность этих структур, их инвариантное физическое содержание можно вывести из так называемых «декоративных перестановок» (в несуперсимметричных теориях также требуются спиральности, или массы и спины [24]). Кратко это обсуждается в разделе 6 но оставляет открытым вопрос: что меняется за пределами пространства-времени и почему? Представляем в разделе 7, что декорированные перестановки являются удобным описанием динамики сознательных агентов, и мы предполагаем, как связать физику пространства-времени с комбинацией и слиянием сознательных агентов.

Агенты не являются эфемерами в пространстве-времени; Пространство-время — это структура данных для компактного представления динамики агента. По этой причине пространство-время не является фундаментальным. Это интерфейс. Однако если пространство-время — это интерфейс, то его объекты, такие как нейроны и мозг, являются значками в интерфейсе — полезными вымыслами. Нейроны не обладают причинной силой. Стандартные интерпретации нейронных коррелятов сознания предполагают иное. Мы обсуждаем в разделе 8, как эти интерпретации должны быть пересмотрены. В заключение мы отмечаем ограничения теории сознательных агентов и ищем новые направления ее развития.

2. Пространство-время обречено

Большинство теорий сознания считают пространство-время фундаментальным. Большинство физиков-теоретиков этого не делают. Разрыв поразителен и является ударом по большинству теорий сознания.

Физики говорят нам, что пространство-время не имеет практического значения на расстояниях, меньших планковской длины, примерно в 10 раз — зсантиметры, или продолжительность короче планковского времени, примерно на 10^{-43} с [25]. Они признают, что «классическое пространство-время — это не фундаментальная составляющая мира, а конструкция, состоящая из более фундаментальных степеней свободы» [26]. Эта точка зрения не является экзотикой. Напротив, многие физики верят в это, независимо от того, какой именно подход к пространству-времени они предпочитают. Однако, несмотря на консенсус в отношении того, что пространство-время не является фундаментальным, большинство теорий сознания в когнитивной нейробиологии, искусственном интеллекте и философии разума по-прежнему включают пространство-время в число своих основополагающих сущностей. В этом разделе мы рассмотрим некоторые аргументы физики в пользу гибели пространства-времени [25]. Их гораздо больше, но ради нашего обсуждения мы ограничимся следующими двумя.

Первый аргумент начинается с простого факта: для измерения меньших объектов нам нужен свет или другое излучение с более короткими длинами волн. Квантовая теория говорит нам, что если длина волны, λ , излучения уменьшается, тогда его энергия, E , увеличивается,

$$E = \frac{hc}{\lambda} \quad (1)$$

где c — скорость света и h — постоянная Планка. Вот почему коллайдеры частиц, такие как Большой адронный коллайдер, используют более высокие энергии для исследования более мелких частиц.

Без гравитации не было бы препятствий. В принципе, мы могли бы генерировать бесконечно более высокие энергии, чтобы исследовать все более мелкие частицы. Однако гравитация портит вечеринку. Эйнштейн учил нас, что масса и энергия эквивалентны.

$$E = mc^2, \quad (2)$$

где m является массовым. Эйнштейн также научил нас, что масса искривляет пространство-время, причем большая масса создает большую кривизну. Итак, по мере уменьшения длины волны излучения концентрация массы-энергии растет, создавая большую кривизну пространства-времени. Когда длина волны приближается к масштабу Планка, кривизна пространства-времени становится настолько велика, что излучение не может выйти наружу. Родается черная дыра и уничтожает объект, который мы хотим наблюдать. Если мы будем упорствовать и использовать еще более высокие энергии, черная дыра станет больше. Таким образом, расстояния и длительности ниже масштаба Планка не могут иметь никакого практического значения.

Второй аргумент касается квантовой теории измерения. Предположим, у нас есть комната фиксированного размера, в которой находится измерительное устройство и измеряемая частица. Каждое измерительное устройство представляет собой физическую систему. По существу, он подвержен квантовой неопределенности энергии и времени, а также неопределенности положения. $\Delta E \Delta t \geq \hbar/2$, $\Delta x \Delta p \geq \hbar/2$.

$$\Delta E \Delta t \geq \hbar/2, \quad (3)$$

$$\Delta x \Delta p \geq \hbar/2. \quad (4)$$

Принцип неопределенности требует, чтобы сделать устройство более точным, мы должны добавить степени свободы. Добавляя их, мы добавляем в устройство больше деталей, и оно становится более массивным. В конце концов устройство схлопывается в черную дыру и разрушает измерения.

Подобные аргументы побудили многих физиков прийти к выводу, что пространство-время не является фундаментальным. Дэвид Гросс, например, говорит: «Я верю, что пространство, а, возможно, и время, обязательно возникнут» [25]. В той же статье Гросс цитирует слова Эда Виттена: «Пространство и время могут быть обречены»; Натан Зайберг: «Я почти уверен, что пространство и время — иллюзии»; и Эндрю Строминджер: «Очевидно, что от понятия пространства-времени нам придется отказаться». В своей лекции в Корнеллском посланнике 2010 года [27], Нима Аркани-Хамед говорит: «Само понятие пространства-времени не является фундаментальным. Пространство-время обречено. В самом базовом описании законов физики фундаментально не существует такой вещи, как пространство-время». Аркани-Хамед [28] также утверждает, что квантовая теория сама по себе не является фундаментальной и возникнет вместе с пространством-временем из какой-то более глубокой структуры: «Итак, есть какая-то другая структура, которую мы ищем, и какой-то способ размышления об интерпретации этой структуры позволит нам увидеть пространство-время и квантовую структуру». механика возникает одновременно и присоединяется к бедру».

Если пространство-время не является фундаментальным, то и его частицы, которые являются неприводимыми представлениями симметрии пространства-времени Пуанкаре, не являются фундаментальными. Макроскопические объекты, такие как нейроны и мозг, также не состоят из частиц. Теория сознания, которая начинается с пространства-времени, частиц, нейронов или мозга, имеет мало шансов. Это особенно проблематично для версий панпсихизма, которые предполагают, что пространство-время — это сцена, на которой разыгрывается драма сознания. [29].

3. Эволюционные игры

Квантовая теория поля и гравитация вместе говорят нам, что пространство-время и объекты в пространстве-времени обречены. Однако как это согласуется с другим столпом современной науки — теорией эволюции путем естественного отбора? Эволюция описывает, как определенные объекты, называемые организмами, развиваются во времени и добывают ресурсы, распределенные в пространстве.

Обычно это подразумевает, что эволюция посредством естественного отбора позволяет нам понять истинную структуру реальности. Конечно, организмы, которые видят реальность более точно, обязательно более приспособлены и с большей вероятностью передают свои гены. Мы здесь сегодня, потому что наши предки видели реальность точнее, чем их конкуренты. Например, по мнению философа и психолога Джерри Фодора, «в «эволюционном», «биологическом» или «научном» мировоззрении нет ничего, что указывало бы или даже предполагало бы, что истинная функция познания иная, чем фиксация истинных убеждений» [30].

Может показаться очевидным, что понимание истины должно сделать вас более приспособленными. Однако это неверно и категорически противоречит самой математике эволюции. Как выразилась философ Патрисия Черчленд, «основная задача мозга состоит в том, чтобы привести части тела туда, где они должны быть, чтобы организм мог выжить. Улучшения в сенсомоторном контроле дают эволюционное преимущество: более изысканный стиль представления [мира] выгоден до тех пор, пока он соответствует образу жизни организма и увеличивает шансы организма на выживание. Истина, чем бы она ни была, забирает самых отсталых» [31].

Ученый-когнитивист Стивен Пинкер соглашается: «Наш разум развился в результате естественного отбора для решения проблем, которые были вопросом жизни и смерти для наших предков, а не для общения с правильностью» [32]. Пинкер ищет несколько контрпримеров идее о том, что восприятие истины повышает приспособленность [33]. Например, вычисление истины требует ценных ресурсов, таких как время и энергия; это может способствовать развитию эвристики, которая сокращает истину и ресурсы. Стремление к общественному признанию может привести к принятию ложных убеждений как формы проявления добродетели. Стратегическая ложь может быть выгодной; лучшие лжецы — это те, кто не осознает, что лжет.

Пинкер, однако, признает: «Идея о том, что разум создан для истины, не является полностью ошибочной. У нас есть некоторые надежные представления о распределении вокруг нас объектов среднего размера...» [33] Черчленд соглашается. Она предполагает, что некоторые объекты среднего размера, такие как мозг и части тела, не являются вымыслом.

Однако объекты среднего размера, оказывается, не освобождаются от налога. Это становится ясным, если провести различие между неформальными объяснениями биологической эволюции и математическими подходами, основанными на эволюционной теории игр. Только первые, кажется, предполагают реальность пространства-времени и объектов среднего размера.

Моделирование и теоремы с использованием инструментов эволюционной теории игр показывают парадоксальный результат: вероятность того, что какая-либо сенсорная система когда-либо была сформирована так, чтобы сообщать о каких-либо истинных структурах объективной реальности, равна нулю [34–36]. Наши чувства не показывают нам истины об объективной реальности. Они просто направляют адаптивные действия.

Ключевой вывод этих исследований связан с «выгодой от приспособленности», управляющей эволюцией. Можно представить эволюцию как видеоигру, в которой нужно набирать очки и избегать смерти, чтобы достичь следующего уровня игры. Выплаты за приспособленность в эволюционной теории подобны этим точкам. Организмы, которые получают больше пользы от фитнеса, передают свои гены следующему поколению.

Таким образом, выгоды от фитнеса формируют эволюцию сенсорных систем. Созданы ли чувства для того, чтобы сообщать правду о структурах объективной реальности? Нет, по той простой причине, что функции выигрыша приспособленности почти наверняка не являются гомоморфизмами структур объективной реальности [37]. То есть выигрышам от приспособленности не хватает информации о структурах объективной реальности, и, следовательно, они не могут формировать чувства для восприятия этих структур.

Однако не опровергает ли этот аргумент сам себя? Он использует математику и логику, чтобы доказать, что человеческие когнитивные способности, такие как математика и логика, ненадежны. Нисколько. Аргументы здесь направлены только на эволюцию сенсорных систем, а не на эволюцию всех когнитивных способностей. Каждую способность необходимо изучать отдельно. В случае с математикой и логикой существует давление отбора в пользу определенных навыков: мы можем получить преимущества в фитнесе, если правильно рассуждаем о выгодах от фитнеса. Например, два укуса груши приносят больше пользы для фитнеса, чем один укус. Груша не является объективной реальностью; это представление выигрышей от приспособленности, которые могут возникнуть при различных действиях, например при укусе. Точные рассуждения об этих преимуществах фитнеса могут улучшить физическую форму, даже если наши сенсорные системы не отражают объективную реальность.

Если наши чувства не являются окном в реальность, то что же они собой представляют? Полезная метафора — думать о наших чувствах как о пользовательском интерфейсе к неизвестной реальности, подобно интерфейсу настольного компьютера на ноутбуке ([34,38–47]; смотрите также [48–50] для родственной идеи фон Икскюля об умвельте). Значки на рабочем столе позволяют контролировать напряжение в цепях ноутбука, не зная ничего об этих цепях. Если бы вам пришлось переключать напряжение, чтобы написать электронное письмо, никто бы о вас не услышал. Знание правды не сделает вас более здоровым; это заставит вас вымереть. Эволюция сформировала наши чувства, чтобы направлять адаптивные действия, а не знать правду. Это называется «теория интерфейса восприятия (ИТП)».

Итак, эволюция путем естественного отбора согласуется с физикой в том, что пространство-время и объекты, о которых сообщают наши органы чувств, не являются фундаментальной реальностью. Это просто структуры данных, которые направляют адаптивные действия [51], то есть, которые помогают нам получать плоды от фитнеса. Существует бесчисленное множество функций фитнеса, связанных с нашими действиями. Мы иерархически группируем эти функции выигрыша и сжимаем кластеры в удобные единицы, которые мы называем макроскопическими объектами. Действия и выплаты, подходящие для груши, сильно отличаются от тех, которые подходят для ядовитого плюща. Десятки тысяч единиц восприятия, которые мы называем объектами, — это способ, с помощью которого наши чувства справляются с множеством преимуществ приспособленности, с которыми нам приходится иметь дело. Мы не имеем дело с этим изобилием, видя истину. Мы справляемся с этим, создавая тысячи объектов в виде компактных структур данных, которые управляют действиями, соответствующими контексту.

Этот сенсорный процесс объединения результатов приспособленности в объекты может быть «когнитивно непроницаемым»: его внутренняя работа может происходить независимо от более высоких когнитивных состояний, таких как цели и убеждения. Более того, построение объектов может происходить одновременно в нескольких сенсорных системах, таких как зрение и осязание; это создает одновременные сопоставления одного стимула с несколькими воспринимаемыми объектами, такими как визуальный котенок и тактильный котенок, которые воспринимаются одновременно, когда человек видит и гладит котенка. (Для некоторых людей одновременный зрительный и тактильный объект даже не осознаются как возникающие в результате одного и того же стимула [52]). Когнитивные цели человека могут направлять внимание на объекты, передаваемые сенсорной системой, и это внимание может побудить сенсорную систему предоставить более подробную информацию об интересующем объекте. Такое отображение одного стимула на отдельные объекты в параллельных сенсорных системах противоречит недавнему утверждению: «Важно, что в качестве реализации когнитивной непроницаемости агент всегда должен использовать одно и то же отображение от стимула (ресурса) к восприятию (цвету), независимо от того, что текущая функция выигрыша равна» [53]. Это ошибочное утверждение было использовано для оправдания дальнейшего ошибочного утверждения о том, что сенсорные системы, если они вынуждены выполнять множество функций вознаграждения, будут сформированы естественным отбором для создания достоверного восприятия. [53].

Объекты не являются независимыми от разума сущностями. Это структуры данных, которые мы конструируем и используем по мере необходимости, а затем собираем мусор, когда они нам больше не нужны. Мы создаем каждый объект одним взглядом и удаляем его одним взглядом или одним взглядом. Объекты не существуют, пока их не наблюдают. Таким образом, они не имеют определенных значений физических свойств, таких как положение или импульс, когда их не наблюдают. Это согласуется с выводом квантовой физики о том, что локальный реализм и внеконтекстуальный реализм оба ложны. [54–56].

А как насчет, скажем, скоростного поезда, мчащегося по рельсам? Если вы думаете, что его нет, когда вы не смотрите, почему бы не встать перед ним и просто не отвести взгляд?

Ответ в том, что эволюция сформировала наши чувства так, чтобы они управляли адаптивным поведением. Мы должны относиться к ним серьезно. Однако это не означает, что мы имеем право понимать их буквально. Для сравнения, я должен серьезно относиться к синему прямоугольному значку на рабочем столе. Если я перетащу его в корзину, я могу потерять файл. Однако файл не является буквально синим или прямоугольным. Точно так же, когда я вижу поезд, я взаимодействую с какой-то реальностью, к которой я должен относиться серьезно, и эта реальность существует независимо от того, смотрю я на нее или нет. Однако эта реальность — не поезд. Действительно, как мы обсудим, эта реальность находится за пределами пространства и времени.

Это касается нейронов и мозга. Они не существуют, пока их не наблюдают. Мы создаем их, когда смотрим, и удаляем, когда отводим взгляд. Таким образом, нейроны не создают ни нашего поведения, ни сознательного опыта. Теории сознания, предполагающие иное, противоречат ясным выводам физики и эволюции.

Однако не слишком ли это поспешно? Разве у нас нет убедительных доказательств того, что мозг существует и является причиной нашего сознательного опыта? Рассмотрим длинный список обнаруженных нейронных коррелятов сознания. Например, активность в области V4 зрительной коры коррелирует с нашим сознательным восприятием цвета. Если устройство транскраниальной магнитной стимуляции (ТМС) используется для подавления области V4 в левом полушарии мозга бодрствующего человека, то этот человек потеряет все цветовое восприятие в правом поле зрения. Все выглядит как черно-белая фотография. Если устройство TMS удалить, человек увидит поток цветов обратно в правое поле зрения. Вмешательство в мозг вызывает изменения в

сознательные переживания. Итак, по всей видимости, мозг должен существовать и вызывать наш сознательный опыт. Как выразился Джеральд Эдельман: «В настоящее время существует огромное количество эмпирических данных, подтверждающих идею о том, что сознание возникает в результате организации и функционирования мозга... Тогда возникает вопрос: какие особенности тела и мозга являются необходимыми и достаточными? чтобы появилось сознание?» [57].

Однако из этого вывода не следует. Рассмотрим игру в теннис в виртуальной реальности. Я ударил по виртуальному теннисному мячу своей виртуальной теннисной ракеткой. Я вмешиваюсь с помощью своей виртуальной ракетки, и виртуальный мяч начинает двигаться. Однако это не означает, что виртуальный ракет существует, когда я его не воспринимаю. На самом деле ракет не существует, пока он не воспринимается. Кроме того, он не имеет причинной силы. В этой метафоре причинной силой обладает какой-то сложный суперкомпьютер, и на самом деле я переключаю миллионы напряжений в этом компьютере. Если бы мне пришлось переключать их явно, я был бы ошеломлен. Ракетка — это всего лишь полезная фикция, позволяющая мне играть в игру. То же самое относится и к физическим объектам, таким как нейроны.

Если нейроны не существуют, когда их не воспринимают, если они всего лишь полезная выдумка, должна ли наука о сознании игнорировать нейробиологию? Нисколько. Напротив, нам нужно больше финансирования нейробиологии, а не меньше. Взаимосвязь между нейронной активностью и сознательным опытом гораздо сложнее, чем обычно представляют. Нам нужно перепроектировать нейроны, чтобы понять более глубокую реальность, стоящую за полезной выдумкой.

Мы можем думать об ИТП как о различии, которое некоторые философы проводят между первичными и вторичными качествами. Джон Локк утверждал, что «первичные качества» объектов, такие как их «объем, фигура или движение», существуют, когда их не воспринимают, но «вторичные качества» объектов, такие как их «цвета и запахи», не существуют. Он тогда утверждал, что «...идеи первичных качеств тел суть их сходства, и их образцы действительно существуют в самих телах, но идеи, производимые в нас этими вторичными качествами, не имеют с ними никакого сходства» [58]. ИТП говорит, что *все* качества являются второстепенными качествами. ИТП, таким образом, соглашается с Иммануилом Кантом, который предлагал «пойти дальше и по веским причинам причислить к простым явлениям и остальные качества тел, которые называются первичными, как-то протяженность, место и в общем пространстве» [59].

4. Сознательные агенты

Квантовая теория и гравитация говорят нам, что пространство-время обречено. Пространство-время и объекты не являются фундаментальной реальностью. Эволюция путем естественного отбора согласна.

Что же тогда является фундаментальным? Эти теории молчат. Наша теория пространства-времени говорит нам о границах пространства-времени, но она не может раскрыть то, что находится за его пределами. Наша теория эволюции говорит нам, что наши сенсорные системы, которые показывают нам объекты в пространстве и времени, не являются окном в истину. Они представляют собой пользовательский интерфейс. Однако интерфейс к чему? Какая реальность лежит за пределами нашего пространства-времени? Эволюция не может сказать.

Итак, мы должны сделать рывок. Мы должны предложить некую реальность за пределами пространства-времени. Затем мы должны предложить, как именно эта более глубокая реальность отображается на пространстве-времени. Кроме того, мы должны показать, что эта более глубокая реальность выглядит как квантовая теория поля и эволюция путем естественного отбора, когда она проецируется на пространство-время.

Мы предполагаем, что сознание является фундаментальным и может быть смоделировано как сеть взаимодействующих «сознательных агентов». В этом разделе мы кратко мотивируем и представляем определение сознательных агентов. Более подробная разработка представлена в другом месте [60,61].

Здесь мы ищем минимальные положения о сознании, которые позволяют построить общую теорию. Это делает наш подход необычным. Большинство научных теорий сознания постулируют физические системы или функциональные свойства физических систем. Некоторые предполагают, что они порождают сознание; например, глобальное рабочее пространство [10,62,63], интегрированная информация [8,64] и организованное объективное снижение [3]. Другие предполагают, что это порождает иллюзию сознания; например, иллюзионизм [14] и схема внимания [15]. Все вышесказанное ошибочно предполагает, что физика пространства-времени является фундаментальной. Иначе обстоит дело, например, в системе Г.В. Лейбница [65], который предположил, что простые вещества («монады») являются основными составляющими Вселенной и что физика, как ее называли,

тогда это было бы результатом динамики сети таких монад (Другие родственные взгляды, иногда называемые «объективным идеализмом», обсуждаются в [66]) Наша собственная точка зрения имеет некоторое сходство с точкой зрения Лейбница, но также и некоторые различия.

Мы начнем с двух положений о сознании: (1) существует сознательный опыт; и (2) между сознательным опытом существуют вероятностные отношения. Эти положения приводят нас к понятию сознательного агента. Наши положения о понятии сознательного агента отражают положения Г.В. Лейбница о его понятии простой субстанции: «В простой субстанции нет ничего, кроме восприятий и их изменений. Кроме того, только в них могут заключаться все внутренние действия простой субстанции» [65]. Лейбниц далее ввел понятие «аппетитий» для описания способности монады вызывать изменения в своем (внутреннем) состоянии. В теории сознательных агентов это отражается решениями, которые агент может принять. Лейбниц считал, что любая монада воспринимается как зеркало всей Вселенной. Здесь мы слегка адаптируем точку зрения Лейбница, представляя действия, которые агент может предпринять в отношении мира. В свою очередь, мир может «воспринимать» агента аналогично тому, как агент воспринимает свой мир.

Неформально, как показано на рисунке¹ Сознательный агент обладает набором возможных переживаний. Он также имеет набор возможных действий. Он встроен в мир, который мы считаем сетью сознательных агентов (тезис «сознательного реализма» [60]). Основываясь на своем текущем опыте, сознательный агент решает, какое действие предпринять. Затем он влияет на опыт сознательных агентов в сети. Затем он воспринимает новый опыт под влиянием сети.

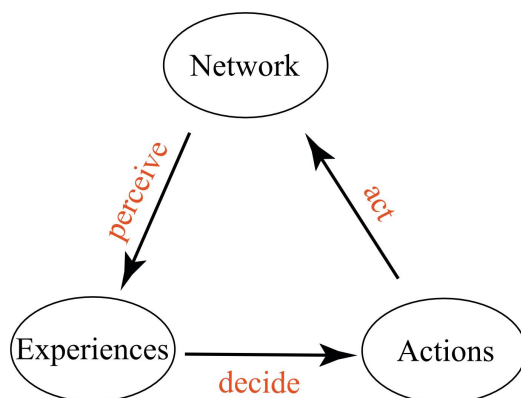


Рисунок 1. Неформальное представление сознательного агента, действующего в сети других агентов на основе своего опыта.

Мы формализуем эти положения, используя (1) измеримые пространства для сознательного опыта и (2) Марковские ядра для вероятностных отношений между сознательными переживаниями. Напомним, что измеримое пространство (I, \mathcal{I}) , определяет элементарные исходы, I , и возможные события, \mathcal{I} , для вероятностного эксперимента. Если, например, эксперимент представляет собой одно подбрасывание монеты, то его элементарные результаты таковы: $I = \{ЧАС, Т\}$, где ЧАС обозначает «голова» и Т обозначает «хвосты». Возможные события: $\mathcal{I} = \{\{ЧАС\}, \{Т\}, I, \emptyset\}$. Набор событий, \mathcal{I} , это σ -алгебра: в стандартной теории вероятностей она замкнута относительно дополнения и счетного объединения, а значит, и относительно счетного пересечения. Набор элементарных исходов может иметь более одного σ -алгебра. Например, в нашем примере с подбрасыванием монеты можно было бы позволить $I = \{I, \emptyset\}$ либо мы наблюдаем что-либо, либо вообще ничего, но не $I = \{\{ЧАС\}, \emptyset\}$ (не закрыт при дополнении) или $I = \{\{ЧАС\}, \{Т\}, \emptyset\}$ (не замкнутое относительно счетного объединения).

С помощью этих инструментов мы можем дать точное определение сознательного агента. Сознательный агент, S , имеет набор потенциальных сознательных переживаний, I_S , образующие измеримое пространство. Он имеет измеримое пространство потенциальных действий, \mathcal{I}_S , что он может предпринять в ответ на свой опыт. Его действия влияют на опыт сети сознательных агентов. Мы предполагаем, что сеть в целом включает рассматриваемого агента и имеет четко определенный набор \mathcal{V} государств, что само по себе образует измеримое пространство. В дальнейшем мы будем обращаться к этому набору \mathcal{V} государств мировой сети просто как «мир».

Кроме того, напомним, что марковское ядро в конечном случае можно представить как матрицу, в которой (1) все элементы неотрицательны и (2) сумма элементов в каждой строке равна 1. Например, ядро K , соотношение двух переживаний с тремя действиями будет равно 2×3 матрица, например

$$K = \begin{bmatrix} .1 & .3 & .6 \\ .4 & .4 & .2 \end{bmatrix} \quad (5)$$

Когда агент S имеет особый сознательный опыт $I \in \mathcal{I}_S$, он выбирает действие $g \in \Gamma$. Этот выбор описывается марковским ядром: D , «ядро решения». Когда определенное действие $g \in \Gamma$ принимается, это влияет на опыт агентов в сети V . Это влияние описывается марковским ядром: A , «ядро действия». Сеть V сознательных агентов, в свою очередь, влияет на сознательный опыт S через марковское ядро, P , «ядро восприятия».

Формально сознательный агент, S , представляет собой 6-кортеж:

$$S = (I_S, \mathcal{I}_S), (g, \Gamma), (V, V), P, D, A, \quad (6)$$

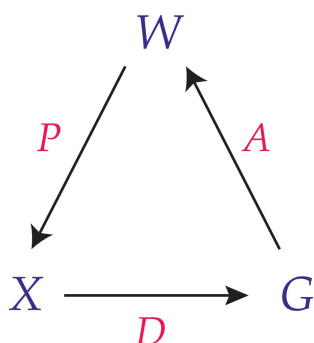
где \mathcal{I}_S, g, V являются σ -алгебры на множествах I_S, g , и V , соответственно, так что $(I_S, \mathcal{I}_S), (g, \Gamma), (V, V)$ являются измеримыми пространствами, а

$$P: V \times X \rightarrow [0, 1], D: \quad (7)$$

$$I_S \times \Gamma \rightarrow [0, 1], A: g \quad (8)$$

$$X \times V \rightarrow [0, 1], \quad (9)$$

являются марковскими ядрами (см. рис.2).



Фигура 2. Диаграмма сознательного агента.

Можно подумать о пространстве опыта (I_S, \mathcal{I}_S) , как указание на осознающего субъекта, который осознает, испытывает ли он конкретный опыт или нет. Когда нет конкретного опыта, осознающий субъект наслаждается осознанием без содержания.

Набор I_S указывает на потенциал этого осознающего субъекта в получении конкретного опыта. Как этот потенциал реализуется в конкретном опыте, не определяется современной теорией сознательных агентов. Это важное ограничение, которое необходимо устранить в будущих версиях теории.

The σ -алгебра I_S указывает на концептуальное представление этого осознающего субъекта о его собственном потенциале получения конкретного опыта. Поскольку σ -алгебра I_S может быть значительно меньше установленной мощности, $\mathcal{I}(I_S)$, концептуальное представление осознающего субъекта о своем собственном потенциале может быть проще, даже бесконечно проще, чем его действительный потенциал.

Это концептуальное представление осознающего субъекта не обязательно должно быть самостью, но оно может быть одним из строительных блоков самости. Базовое определение сознательного агента не включает понятие самости. Мы предполагаем, что личность должна конструироваться сетью взаимодействующих сознательных агентов.

Набор g указывает на потенциал осознающего субъекта к действию. Однако, g не обязательно переживается непосредственно осознающим субъектом, поскольку его переживания ограничены набором I_S .

Для простоты обозначений мы не всегда будем явно упоминать σ -алгебры, письмо, например, I иметь в виду пару (I, σ) всякий раз, когда это очевидно из контекста.

Несложно показать, что сети сознательных агентов вычислительно универсальны. Все, что может быть вычислено нейронными сетями или универсальными машинами Тьюринга, может быть вычислено сетями сознательных агентов [67, 68]. Таким образом, мы ожидаем построить сети сознательных агентов, которые смогут построить (упрощенную) модель себя. Действительно, мы ожидаем построить сети для большинства пунктов в списке, с которого начался этот раздел, включая обучение, память, решение проблем, интеллект, личность, свободную волю, внимание, комбинации квалиа, комбинации предметов, мораль, уровни осознания, измененные состояния сознания, семантика, понимание, понятие физического объекта, пространство-время, квантовая теория и, наконец, отношения между физикой и сознанием (включая сложную проблему сознания).

В следующем разделе мы рассмотрим одну конкретную проблему, а именно проблему комбинирования сознания. Мы выбрали эту проблему, потому что она представляет собой, пожалуй, самую сложную проблему для любой теории, в которой сознание является фундаментальным. Затем мы переходим к обсуждению проблемы того, как понимать физические объекты в рамках теории сознательных агентов (раздел 6).

Мы утверждаем, что эти проблемы глубоко связаны между собой. Теория комбинации (и «слияния», как мы ее представим и обсудим) точно определяет основные ингредиенты, необходимые нам для понимания понятия «физические объекты в пространстве-времени». Наш опыт захватывающий. Мы чувствуем, что находимся внутри пространства-времени и внутри нашего тела (которое также является объектом в пространстве-времени). Это чувство не передается метафорой пользовательского интерфейса. Это лучше уловится, если мы переключимся на метафору виртуальной реальности: каждый из нас носит гарнитуру виртуальной реальности, которая представляет нас как аватар, погруженный в пространство-время и взаимодействующий с объектами. Эта аллегория гарнитуры — всего лишь аллегория Платона о пещере, с технологией, обновленной от огня до виртуальной реальности.

Прежде чем мы перейдем к проблеме комбинирования, мы кратко рассмотрим пару вопросов, часто возникающих в связи с этой программой.

Теория интерфейса восприятия и теория сознательных агентов — это разные теории [69]. Можно принять одно и не принять другое (или отвергнуть оба). Однако, если мы принимаем обе теории, они вместе подразумевают, что различие, которое мы проводим между сознательными и бессознательными объектами, не является принципиальным, а является результатом ограничений нашего интерфейса восприятия. Мы говорим, что человек обладает сознанием, а камень — нет. Однако если наше восприятие пространства-времени и объектов — это всего лишь интерфейс для сети сознательных агентов за пределами пространства-времени, то мы всегда взаимодействуем с сознательными агентами, независимо от того, какой объект мы видим. В случае с человеком, когда я смотрю на его лицо и тело, я получаю некоторое представление о его сознании: счастливы ли они, грустны, напуганы, расслаблены, заинтересованы, отвлечены и так далее. Когда я смотрю на камень, я ощущаю, скажем, твердость и хрупкость, но минимальное проникновение в сознание. Это не значит, что я не взаимодействую с сознательными агентами. Я всегда есть. Просто мой интерфейс дает мне мало информации об этих агентах. Это неудивительно. Вся суть пользовательского интерфейса состоит в том, чтобы представить гораздо более простое описание, при этом большая часть деталей реальности удалена, и обеспечить адаптивное представление функциональных аспектов взаимодействия, чтобы не перегружать слишком большим количеством информации.

Это означает, а fortiori, что различие, которое мы проводим между живыми и неживыми объектами, не является принципиальным. Это тоже всего лишь артефакт ограничений нашего интерфейса восприятия, а не понимание природы реальности. Поэтому неудивительно, что попытки ученых и философов дать принципиальное определение жизни до сих пор не увенчались успехом. Как говорится в статье «Жизнь» Стэнфордской энциклопедии философии: «Литература по определению жизни обширна, повторяется и совершенно неубедительна. Философы расходятся во мнениях относительно основного источника отсутствия консенсуса, ссылаясь на невысказанные предположения либо в подходе определяющего, либо в самом вопросе» [70].

Сочетание интерфейсной теории восприятия с теорией сознательных агентов заставило некоторых беспокоиться, что они могут опровергнуть сами себя. Как выразился философ Филип Гофф: «Если мы должны сомневаться в показаниях наших чувств, то нам следует точно так же

сомневаться в свидетельстве нашей развитой способности формировать суждения относительно психических состояний других. Мы запрограммированы судить об эмоциях других на основе их поведения и выражения лица. Однако если эта запрограммированная способность была развита для выживания, а не для истины, и если этого достаточно для того, чтобы мы отвергли данные нашего чувственного восприятия, тогда мы должны аналогичным образом отвергнуть наши суждения о других разумах. Нам следует думать, что другие — зомби, или, по крайней мере, не верить своим суждениям о том, что плач указывает на печаль. Я считаю это доведением до абсурда аргумента «Фитнес важнее истины». Подобные аргументы редукции предложены в [71].

Разрешение этого кажущегося доведения до абсурда происходит благодаря признанию двух отдельных шагов в нашей аргументации. Первым шагом является теорема о теории эволюции путем естественного отбора. Эта теория, к лучшему или к худшему, предполагает, что сенсорные системы — это пользовательские интерфейсы, а не окна в реальность. Однако эта теория не может ответить на вопрос: «Интерфейсы к чему?» Какова реальность за пределами наших пользовательских интерфейсов? Чтобы ответить на этот вопрос, мы должны сделать новый шаг, совершенно отдельный от теории эволюции путем естественного отбора и за ее пределами. Мы предполагаем, что реальность за пределами наших пользовательских интерфейсов — это реальность, состоящая из сознательных агентов.

По нашему мнению, наши чувства являются интерфейсами для сети сознательных агентов. Это предложение выходит за рамки эволюции путем естественного отбора. В определении сознательного агента в уравнении (6), мы представили σ -алгебра *Икс* стоять за концептуальное представление осознающего субъекта. Именно здесь ИТП требует осторожности. Почти наверняка, *Икс* не будет отражать какую-либо истинную структуру реальности, например, когда мы сортируем то, что мы переживаем, на категории живое/неживое. Однако это не значит, что мы не переживаем переживания *Икс*. Фактически, мы испытываем переживания каждое мгновение. Это также не означает, что опыт не выражается в поведении. На самом деле мы предлагаем, чтобы *Икс* приводит к в нашем формализме. Следовательно, нам не следует ожидать, что другие станут зомби или не будут испытывать грусти во время плача, пока они (примерно) разделяют нашу эволюционную историю. Вероятно, это было бы вредно для нашего выживания, если бы мы считали, что другие являются зомби.

Короче говоря, это теорема о том, что наше восприятие объектов в пространстве-времени не является достоверным восприятием реальных объектов в реальном пространстве-времени; это пользовательский интерфейс к сфере, которая совершенно не похожа на объекты в пространстве-времени. Это царство оказывается царством сознательных агентов. Тогда нетрудно заключить, что наш интерфейс предоставляет реальный доступ к некоторым сознательным переживаниям этих агентов.

5. Объедините и соедините

Могут ли сознательные субъекты объединиться, чтобы сформировать новых сознательных субъектов? Может ли сознательный опыт объединиться, чтобы сформировать новый сознательный опыт? Это центральные вопросы *комбинированная проблематика* сознания, сформулированную в 1895 году Уильямом Джеймсом в *Принципы психологии*.

«Там, где элементарными единицами считаются чувства, дело ни в коей мере не меняется. Возьмите сотню штук, перетасуйте их и сложите как можно ближе друг к другу (что бы это ни значило); и все же каждое из них остается тем же чувством, каким оно было всегда, запертым в своей шкуре, без окон, не знаящим, что такое и что означают другие чувства. Там было бы сто первое чувство, если бы при возникновении группы или ряда таких чувств возникло сознание, принадлежащее группе как таковой. Кроме того, это 101-е чувство было бы совершенно новым фактом; 100 первоначальных чувств могли бы, согласно любопытному физическому закону, стать сигналом к его созданию, когда они сошлись вместе; но они не имели бы никакой существенной идентичности ни с ним, ни оно с ними, и никогда нельзя было бы вывести одно из других или (в каком-либо разумном смысле) сказать, что они развили его». Дальше:

«Возьмите предложение из дюжины слов, возьмите двенадцать человек и скажите каждому по одному слову. Затем поставьте людей в ряд или соберите их в кучу, и пусть каждый думает о своем слове так внимательно, как он хочет; нигде не будет сознания всего предложения. Мы говорим о «духе времени» и «чувствах народа» и разными способами гипостазируем «общественное мнение». Однако мы знаем, что это символическая речь, и никогда не думаем, что дух, мнение, чувство и т. д. составляют сознание, отличное от этого и дополняющее его.

из нескольких индивидуумов, которых обозначают слова «возраст», «народ» или «общественность». Частные разумы не объединяются в более высокий сложный разум».

Эта комбинированная проблема в последнее время вызвала существенный философский интерес, во многом вызванный развитием панпсихистских теорий сознания. [20, 72–80]. Сигер описывает проблему объединения как «проблему объяснения того, как бесчисленные элементы «атомарного сознания» могут быть объединены в новое, сложное и богатое сознание, подобное тому, которым мы обладаем». [72]. Мы используем теорию сознательных агентов, чтобы предложить два математических подхода к проблеме комбинации: комбинация и слияние.

Чтобы понять, как сознательные агенты и квалиа объединяются, создавая новых агентов и квалиа, мы изучаем взаимодействия между агентами и то, как эти взаимодействия влияют на их опыт. Для этого составим ядра ρ, Δ , и Агента для создания своего «ядра квалиа», $\text{вопрос} \text{ Икс}$ самому себе (используя определения в уравнениях (7)–(9), com) связанное ядро $\text{вопрос} = \text{ДАП}$ дается, для $\text{Икс} \in \text{Икс}$ измеримый набор $B \in X$, $\text{вопрос}(\text{Икс}, B) = \int_{\omega \in B} \rho(\omega) \text{ДАП}(\text{Икс}, \omega) d\mu(\omega)$ ($\int_{\omega \in B} \rho(\omega) \text{ДАП}(\text{Икс}, \omega) d\mu(\omega)$):

$$\text{вопрос} = \text{ДАП} : \text{Икс} \times X \rightarrow [0, 1]. \tag{10}$$

вопрос описывает последовательный опыт агента без ссылки на другие его внутренние аспекты, такие как его решения или действия, или на природу сети, с которой он взаимодействует.

Для ядер, имеющих матричное представление, композиция — это просто умножение матриц. В этом случае, вопрос это матрица, которая отображает $\text{Икс} \times \text{Икс}$.

Ядро квалиа, вопрос таким образом, выражает отношение сознательного опыта к самому себе. Это также может объяснить неуловимое «что это такое подобие» сознательного опыта. Для простейшего агента Икс имеет только одну точку $\text{Икс} \in \text{Икс}$, т. е. всего лишь один сознательный опыт. Тогда ядро квалиа дало бы меру Дирака по этому вопросу:

$$\text{вопрос}(\text{Икс}, \cdot) = \delta_{\text{Икс}}(\cdot). \tag{11}$$

Мы звоним агенту с n отдельных квалиа n -агент. Квалиа может отличаться от одного n -агент другого. Мы постулируем большое, возможно, счетное множество 1-агентов, каждый из которых имеет уникальное качество.

Теперь рассмотрим двух 1-агентов, C_1 и C_2 , с ядрами квалиа

$$\text{вопрос}_1 : \text{Икс}_1 \times X_1 \rightarrow [0, 1], \tag{12}$$

и

$$\text{вопрос}_2 : \text{Икс}_2 \times X_2 \rightarrow [0, 1], \tag{13}$$

соответственно. Позволять $\text{Икс}_1 = \{ \text{Икс}_1 \}$ и $\text{Икс}_2 = \{ \text{Икс}_2 \}$, где Икс_j обозначает опыт.

Если мы возьмем Икс_1 быть качественным красным и Икс_2 быть зеленым, то мы можем изобразить действие их ядер квалиа, как показано на рисунке. 3.

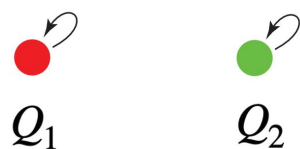


Рисунок 3. Ядра квалиа двух 1-агентов: одного, воспринимающего красный цвет, и другого, воспринимающего зеленый. На этой диаграмме агенты не взаимодействуют, а их квалиа не объединяются.

Как эти агенты могут взаимодействовать и объединяться? Чтобы изучить это, рассмотрим ядро квалиа: вопрос , для возможных опытов 2-агента. Это ядро 2×2 матрица, элементами которой являются следующие условные вероятности:

$$\text{вопрос}(\text{Икс}_1, \text{Икс}_2) = \begin{bmatrix} P(\text{Икс}_1 / x_1) & P(\text{Икс}_2 / x_1) \\ P(\text{Икс}_1 / x_2) & P(\text{Икс}_2 / x_2) \end{bmatrix}, \tag{14}$$

Мы интерпретируем запись $l(I_{k1} / x_2)$ в этой матрице как вероятность того, что следующий опыт пары агентов будет красным, учитывая, что текущий опыт — зеленый.

Предположим, у нас есть два агента

$$C_1 = "I_{k1}, \Gamma_1, B\Gamma_1, \Gamma_1, D_1, A_1); \quad C_2 = "I_{k2}, \Gamma_2, B\Gamma_2, \Gamma_2, D_2, A_2). \quad (15)$$

Обратите внимание, что 6-кортеж

$$C_1 \times C_2 = "I_{k1} \times I_{k2}, \Gamma_1 \times \Gamma_2, B\Gamma_1 \times B\Gamma_2, \Gamma_1 \otimes \Gamma_2, D_1 \otimes D_2, A_1 \otimes A_2), \quad (16)$$

удовлетворяет определению единственного сознательного агента (ср. уравнение (6) и [60]). Мы предполагаем, что σ -алгебры на множествах $I_{k1} \times I_{k2}$ и т. д. являются алгебрами-произведениями. Марковское ядро $\Gamma_1 \otimes \Gamma_2: B\Gamma_1 \times B\Gamma_2 \rightarrow I_{k1} \times I_{k2}$ определяется $\Gamma_1 \otimes \Gamma_2(l_{11}, l_{12}; d_{x1}, d_{x2}) = " \Gamma_1(l_{11}; d_{x1}) \Gamma_2(l_{12}; d_{x2}), D_1 \otimes D_2: I_{k1} \times I_{k2} \rightarrow \Gamma_1 \times \Gamma_2, A_1 \otimes A_2: \Gamma_1 \times \Gamma_2 \rightarrow B\Gamma_1 \times B\Gamma_2$ определяются аналогичным образом и, таким образом, согласно теории сознательных агентов, должны рассматриваться как единый агент.

Следовательно, такое сопоставление двух простых агентов приводит к созданию более сложного агента. Тогда у нового агента есть два потенциальных опыта: красный и зеленый. Однако у этого нового агента очень простая *вопроса* ядро, а именно *вопрос* \otimes *вопрос*, который имеет блочно-диагональную форму. В частности, недиагональные члены или перекрестные члены в уравнении (14) оба равны нулю, и мы можем думать об агентах C_1 и C_2 как «невзаимодействующий».

На данный момент мы принимаем за аксиому, что два агента могут объединяться с произвольными перекрестными членами (при условии, что они удовлетворяют критерию Маркова), как это выражено в уравнении (14). Мы предполагаем, что эта аксиома не нужна и что для каждого допустимого набора перекрестных термов существует сеть V можно построить так, чтобы генерировать эти перекрестные члены.

Если мы позволим

$$I_{k2} = " \Gamma(I_{k2} / x_1), \text{ и} \quad (17)$$

$$" = " \Gamma(I_{k1} / x_2), \text{ ,} \quad (18)$$

тогда можно упростить (14) к

$$\text{вопрос}(I_{k1}, \text{ и} = " \begin{bmatrix} 1 - I_{k1} & I_{k2} \\ \text{и} & 1 - \text{и} \end{bmatrix} \quad (19)$$

потому что каждая строка должна в сумме равняться 1, чтобы удовлетворить требованию марковости.

Если $I_{k1} = " \text{ и} = " 0$, то эта матрица является единичной матрицей

$$\text{вопрос}(I_{k1}, \text{ и} = " \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (20)$$

В этом особом случае, когда перекрестные члены равны 0, два агента не «взаимодействуют». Тем не менее, как мы продемонстрировали в уравнении (16), пара таких невзаимодействующих 1-битных агентов, C_1, C_2 , можно рассматривать как одиночный (комбинированный) 2-битный агент. Сейчас мы покажем, что два 1-агента не только могут быть объединены в более сложный 2-агент, но и могут «слиться» в более простой 2-агент.

Если любой из перекрестных членов больше 0, то агенты взаимодействуют в нетривиальной динамике. Максимальное значение любого перекрестного члена равно 1. Таким образом, набор ядер можно представить точками $(I_{k1}, \text{ и})$ в единичном квадрате, ограниченном $\{0, 0\}, \{0, 1\}, \{1, 0\}, \{1, 1\}$. Этот единичный квадрат, содержащий все ядра с двумя состояниями, мы называем *Марковский многогранник, M2*. Сбор всех ядер с n состояниями — это единичный куб в n -мерное реальное пространство и называется здесь многогранником Маркова. M_n .

Ядровопрос описывает единичное взаимодействие агентов. Для описания двух последовательных взаимодействий нам понадобится ядровопрос, где

$$\text{вопрос} = \text{QQ} = \begin{bmatrix} (1 - Икс)2 + ху & Икс(2 - х - у) \\ й(2 - х - у) & (1 - й)2 + ху \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - Икс' & Икс' \\ й' & 1 - й' \end{bmatrix} \quad (21)$$

Разностный коэффициент этих двух ядер представляет собой (вообще немарковскую) матрицу *вопрос-вопрос*. Ограничим внимание недиагональными членами *вопрос-вопрос*, поскольку они фиксируют диагональные члены. Внедиагональные члены определяют дискретную «производную ядра», *двопрос*_{дт}, по параметру дискретного шага τ . Эта производная в точке $(Икс, й)$ в марковском многограннике, M_2 , является

$$\frac{\text{двопрос}}{\text{дт}} = \frac{\text{дИкс}}{\text{дт}} \frac{\text{дй}}{\text{дт}} = Икс(1 - х - у), й(1 - х - у). \quad (22)$$

Производные показывают направление «потоков ядра» через M_2 , как показано векторным полем на рисунке 4. «Поток» марковского ядра *вопрос* это марковское ядро $\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{вопрос}^n$.

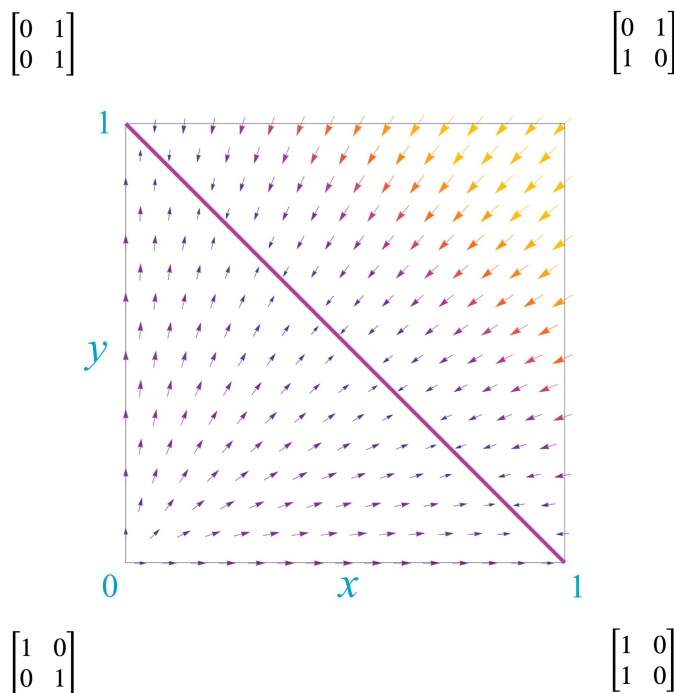


Рисунок 4. Поток марковских ядер на M_2 , марковский многогранник двух состояний. Этот многогранник представляет собой единичный квадрат с координатами $(Икс, й)$, где $Икс = \mu(Икс_2 / x_1)$ и $й = \mu(Икс_1 / x_2)$. Стрелки указывают направление местного потока. Длина и цвет стрелки указывают скорость потока.

Нижний левый угол M_2 , точка $(0, 0)$, соответствующая единичной матрице, является единственным источником этого векторного поля. Правый верхний угол, точка $(1, 1)$, соответствующая оператору НЕ, не течет, а представляет собой периодическое ядро с периодом 2. Имеется линия стоков, линия $й' = 1 - Икс$, изображенный диагональной красной линией. По этой линии ядра

$$\text{вопрос}_{Икс, й} = \begin{bmatrix} 1 - Икс & Икс \\ й & 1 - й \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - Икс & Икс \\ 1 - Икс & Икс \end{bmatrix} \quad (23)$$

Таким образом, когда ядра достигают этой линии, они понижаются с ранга 2 до ранга 1. Как мы обсудим позже, это сигнализирует о слиянии агентов и создании новых квалиа.

Каждое ядровопрос $(Икс, й)$ имеет уникальную комбинацию цветов, которая остается неизменной. Мы можем представить комбинацию цветов с помощью меры вероятности.

$$\mu = \begin{bmatrix} \alpha & 1 - \alpha \end{bmatrix}, 0 \leq \alpha \leq 1, \quad (24)$$

где α это пропорция красного и $1 - \alpha$ это доля зеленого цвета. Мера инвариантна для ядра вопроса если

$$\mu \circ P = \mu. \tag{25}$$

Мы можем использовать это, чтобы найти все ядра вопроса которые имеют одну и ту же инвариантную меру.

$$\begin{bmatrix} \alpha & 1-\alpha \\ 1-\alpha & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \alpha & 1-\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \\ & 1-\alpha \end{bmatrix}. \tag{26}$$

Решая эту задачу, находим строки

$$\alpha' = \frac{\alpha}{1-\alpha} \alpha. \tag{27}$$

Таким образом, для каждого значения α существует линия ядер, которая следует за потоком векторного поля. Два примера показаны на рисунке 5, изображенный зелеными линиями.

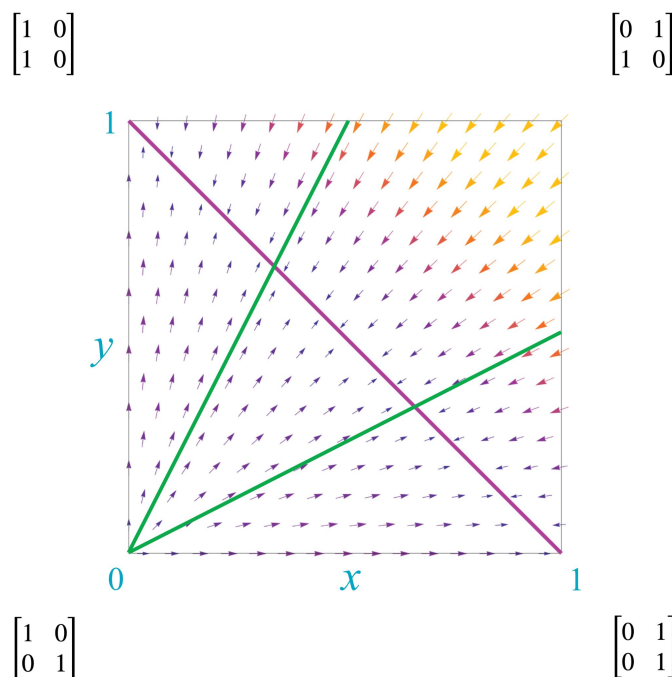


Рисунок 5. Инвариантные меры на марковском многограннике M_2 . Ядра с одинаковой инвариантной мерой лежат на прямой, проходящей через начало координат. Два примера показаны зелеными линиями. Нижняя линия соответствует $\alpha' = 1/3$. Верхняя линия соответствует $\alpha' = 2/3$.

Полезно визуализировать инвариантную меру, связанную с каждым ядром марковского многогранника M_2 . Это завершено на рисунке 6, который изображает смесь красного и зеленого цветов, определяемую инвариантной мерой для каждого ядра в M_2 . Стационарное ядро – это любое ядро вопроса который идемпотентен, т. е. удовлетворяет $Q \circ Q = Q$. Эти ядра соответствуют линии стоков, показанной на рис. 4. Фигура 6 показывает связь этих ядер со смесью красного и зеленого в инвариантных мерах.

Стационарные ядра лежат на прямой $\alpha' = 1 - \alpha$. В этом смысле ядра можно записать так:

$$\text{вопрос } (I_{\alpha}, \alpha') = \begin{bmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \alpha & 1-\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ 1-\alpha & \alpha \end{bmatrix} \tag{28}$$

Таким образом, когда ядра достигают этой линии стационарных ядер, они падают с ранга 2 до ранга 1 и являются функцией всего одного параметра, скажем

$$\alpha' = 1 - \alpha. \tag{29}$$

Это сигнализирует о слиянии агентов. Два агента, *вопрос* и *вопрос* сначала объединятся, чтобы сформировать двухпараметрическое семейство, *вопрос*(I, k, j). Все комбинированные агенты имеют исходные два качества: красный и зеленый. Теперь, с падением ранга ядра качества, объединенные агенты сливаются в одиночных агентов только с одним качеством. Существует однопараметрическое семейство новых слитых агентов, а точнее единичный 1-симплекс *вопрос*(α), каждый со своим новым качеством, как показано на рисунке.7.

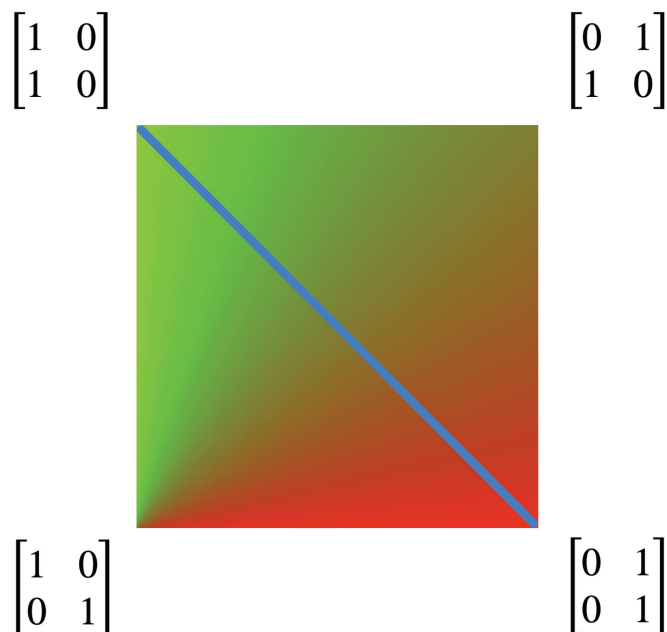


Рисунок 6. Инвариантные меры и стационарные ядра в марковском многограннике M_2 . Цвет в каждой точке (I, k, j) указывает на смесь красного и зеленого цветов в инвариантной мере ядра *вопрос*(I, k, j) связанной с этой точкой уравнением (26). Синяя диагональная линия изображает стационарные ядра *вопрос*, удовлетворяя $QQ' = I$ за исключением единичной матрицы, которая тривиально стационарна.

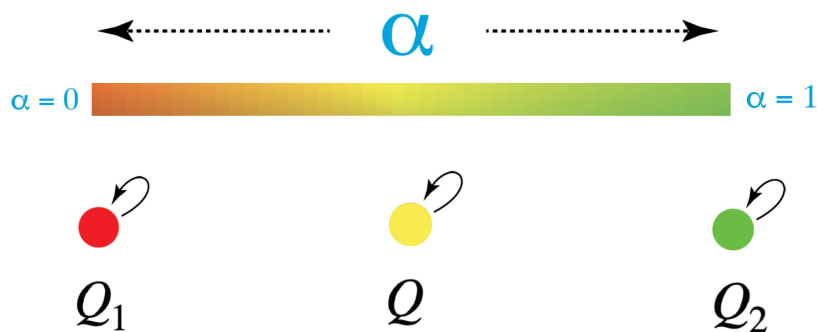


Рисунок 7. Единица 1-симплекс слияний двух сознательных агентов.

Эта модель продолжается. Если n сознательные агенты взаимодействуют, их возможные слияния образуют единое целое $(n-1)$ -симплекс, симплекс слияния Φ_n , соответствующий возможным стационарным ядрам. Например, если у нас есть три агента, *вопрос1*, *вопрос2*, *вопрос3*, с качествами красным, зеленым и синим соответственно, то их возможные слияния образуют единичный 2-симплекс, показанный на рисунке.8.

Любая совокупность агентов сама по себе является агентом. Таким образом, в конечном итоге есть один агент. Подобную позицию отстаивал физик Эрвин Шредингер в своем эссе «Разум и материя».81]. Тем не менее, исследование сознания посредством его возможных комбинаций и слияний кажется бесконечным. По этой причине теория сознания не может начинаться с теории «Высшего Единого Сознания». Однако если мы начнем со счетной бесконечности, \aleph_0 , агентов, то число возможных комбинаций, 2^{\aleph_0} , и их слияние представляет собой

большая бесконечность, \aleph_1 , а число возможных новых комбинаций этих комбинаций есть еще большая бесконечность, \aleph_2 и так далее по иерархии Кантора [82].

С этой точки зрения меньшие единицы, возможно, являются не чем иным, как проекциями Единого. Если бы мы могли уловить глубокую связь между этими единицами и Единым, мы могли бы сразу разрешить «арифметический парадокс» Шрёдингера (мир един, но субъектов, кажется, много). [81]), а также рассматривают теорию сознательных агентов как формальную модель монадологии Лейбница для документирования «предустановленной гармонии» [65] между монадами. Однако сейчас мы должны начать со скромного начала и подняться вверх по иерархии Кантора. На каждом этапе этого процесса наша теория сама указывает на присущие ей ограничения и на бесконечную невыполненную работу. Это противоядие от догматизма предлагает бесконечную гарантию занятости для изучающих сознание.

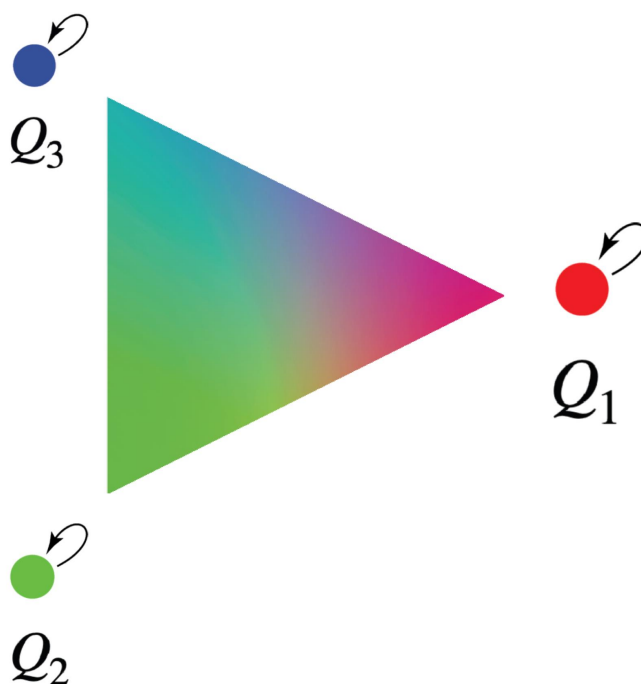


Рисунок 8. Блок 2-симплекс слияний для трёх сознательных агентов.

Тем временем, следующим шагом будет изучение возможных комбинаций и слияний трех агентов. Мы начнем это исследование с Приложения. Ак этой бумаге.

6. Пространство-время и декорированные перестановки

В этом и следующем разделах предлагается, как спроецировать динамику сознательных агентов в пространство-время, используя структуры, называемые «декоративными перестановками». Начнем с разработки необходимого фона.

Как сознание связано с пространством-временем и физическими объектами? Физикалистские теории сознания обычно предполагают, что пространство-время и физические объекты являются фундаментальными, а сознание каким-то образом возникающим. Напротив, многие панпсихистские теории считают сознание внутренней природой физических объектов, а некоторые, похоже, предполагают, что пространство-время является фундаментальным. Однако сама физика и эволюция предполагают, что пространство-время не является фундаментальным, что исключает эти теории.

Теория сознательных агентов начинается с динамики агентов, которая, по гипотезе, находится вне пространства-времени. Таким образом, эта теория должна объяснить, как пространство-время и объекты полностью возникают из динамики агентов. Это колоссальный проект.

Как говорит Гофф: «Было достаточно сложно получить те уравнения физики, которые у нас уже есть. Создать под этим совершенно новый уровень математической структуры, который дает точно такие же предсказания, является довольно сложной задачей. Более того, я не вижу мотивации для решения этой задачи» [83].

Под «физикой» здесь обычно понимают физику пространства-времени и объектов, а именно квантовую теорию поля и общую теорию относительности. Однако мы не обнаруживаем сеть сознательных агентов. *Внутри* пространство-время именно потому, что физика и эволюция говорят нам, что эти структуры не являются фундаментальными, и потому, что сама физика обнаружила новые структуры за пределами пространства-времени, такие как амплитуды и связанные с ними декорированные перестановки. Поэтому вместо того, чтобы просто переописывать традиционную физику с помощью сознательных агентов, мы стремимся показать, как украшенные перестановки и другие структуры, которые физики обнаружили за пределами пространства-времени, возникают как проекция более глубокой теории сознательных агентов.

Ранний намек на структуры за пределами пространства-времени появился в 1986 году. Физики изучают элементарные частицы, сталкивая их друг с другом при высоких энергиях и наблюдая, что из них расплывается. Квантовая теория поля предоставляет формулы, называемые амплитудами рассеяния, для вычисления вероятностей различных результатов. Эти формулы выводятся из диаграмм Фейнмана, которые моделируют рассеяние как квантовые процессы, происходящие в пространстве-времени, то есть как удовлетворяющие локальности и унитарности. Однако формулы сложны. Формула столкновения двух глюонов с образованием четырех глюонов требует сотен страниц алгебры. Затем, в 1986 году, два математика, Парк и Тейлор, открыли формулу рассеяния глюонов, которая требовала всего одного члена [84]. Он не моделировал рассеяние как процесс в пространстве-времени, а указывал на царство за пределами пространства-времени.

За формулой Парка-Тейлора вскоре последовали другие, которые волшебным образом упростили математику и указали на мир за пределами пространства-времени. Затем в 2013 году многие из этих результатов были объединены в единую структуру, геометрический объект за пределами пространства-времени, получивший название «амплитуд» [22]. Амплитуда конкретного процесса рассеяния получается путем вычисления объема соответствующего ему амплитуды. Амплитуды для различных процессов рассеяния представляют собой грани бесконечномерного мастер-амплитуды.

Амплитуд получается линейным отображением положительного грассманиана [22,24,85]. Напомним, что настоящий Грассманиан $G(k, n)$ это пространство всего k -мерные подпространства n -мерное векторное пространство. Элемент $G(k, n)$ может быть неканонически представлена любой из своих базисов и, следовательно, полноранговой $k \times n$ матрица C . Координаты Плюккера для $G(k, n)$ являются определяющими факторами всего $k \times k$ несовременные C . Положительный Грассманиан $G_+(k, n)$, является подмножеством вещественного грассманиана, где все координаты Плюккера неотрицательны, т. е. все подпространства имеют неотрицательный наклон (см. [85,86] для неформального обсуждения).

Примечательно, что инвариантное физическое содержание положительного грассманиана является комбинаторным и описывается «украшенными перестановками». Напомним, что *перестановка* на n съёмочной площадке $N = \{1, \dots, n\}$ является биекцией множества в себя. Обозначим такую перестановку через $c = (c(1), c(2), \dots, c(n))$.

Обычная перестановка скажем, может быть *украшена* для получения отображений $\overline{\sigma}: N \rightarrow \overline{2N} = \{1, \dots, 2n\}$ следующими способами: если $c(a) > a$, набор $\alpha(a) = c(a)$. Если $c(a) < a$, набор $\alpha(a) = c(a) + n$. Если $c(a) = a$, набор $\alpha(a)$ быть либо a или $a + n$. Это предполагает

Определение 1. *Декорированная перестановка* — это отображение $\overline{\sigma}: N \rightarrow \overline{2N}$ такой, что для любого a

$$a \leq \alpha(a) \leq a + n \tag{30}$$

и

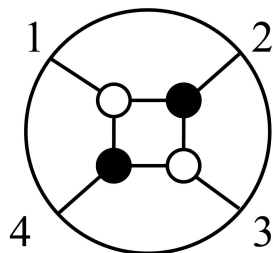
$$\alpha(a) \text{ mod } (n) \tag{31}$$

это *обычная перестановка*.

Обратите внимание, что определенная таким образом декорированная перестановка является инъективным отображением и действительно является украшением (уникальной) обычной перестановки $\alpha(a) \text{ mod } (n)$. Более того, мы видим, что если обычная перестановка имеет ровно k фиксированные точки, их $2k$ соответствующие ему декорированные перестановки. В частности, есть $2n$ украшения идентичности.

Декорированные перестановки могут быть представлены диаграммами, которые математики называют «плабическими графами», а физики — «диаграммами на оболочке» [22,87]. Например, для декорированной перестановки [3, 4, 5, 6] диаграмма на оболочке показана на рисунке.9. Цифры для

переставляться, располагаются по кругу по часовой стрелке. Чтобы прочесть перестановку на диаграмме, проследите линию от числа на диаграмме. Если линия попадает в белую точку, поверните налево. Если он упадет на черную точку, поверните направо. Например, линия, идущая внутрь от 1, попадает в белую точку, поэтому мы поворачиваем налево и нажимаем на черную точку, поэтому мы поворачиваем направо и нажимаем на белую точку, поэтому мы поворачиваем налево и приходим к 3. Таким образом, 1 заменяется на 3. Аналогично, линия, идущая внутрь от 2, попадает в черную точку, поэтому мы поворачиваем направо и попадаем в белую точку, поэтому мы поворачиваем налево и попадаем в черную точку, поэтому мы поворачиваем направо и приходим к 4. Таким образом, 2 заменяется на 4. Если мы начинаем с 3, а закончим с 1. Однако заметьте, что для соответствующей декорированной перестановки нам теперь нужно добавить 4, потому что $a^1=3 > a^2=1$, поэтому в итоге получаем 3→5. Аналогично находим 4→6.



$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Рисунок 9. Диаграмма на оболочке для декорированной перестановки $\sigma = [3, 4, 5, 6]$.

С другой стороны, для данной декорированной перестановки существует множество соответствующих диаграмм на оболочке различной сложности. Диаграмма, актуальная для физиков, вычисляющих амплитуды рассеяния, является «уменьшенной» диаграммой. Его можно получить путем разложения декорированной перестановки на минимальную последовательность «смежных» транспозиций с помощью следующего простого алгоритма, который затем можно использовать для создания соответствующей диаграммы на оболочке, которая сокращается [22]. Для любой декорированной перестановки это еще не украшение тождественной перестановки, найдите лексикографически первую пару чисел $\{1, \dots, n\}$, такой, что (1) $a < c$, (2) $\sigma(a) < \sigma(c)$ и (3) числа между a и c отображены себе или себе плюс n . Позволять (*переменный ток*) обозначают (обычную) транспозицию a и c , если он удовлетворяет трем условиям, указанным выше, называется *соседняя транспозиция*. Тогда мы сможем разложить σ как $\sigma = \dots \circ (\text{переменный ток}) \circ \sigma$. Повторите этот процесс для следующей доступной соседней транспозиции. Мы видим, что как только все смежные транспозиции будут исчерпаны, оставшаяся перестановка останется украшением идентичности. Последний шаг от произведения смежных транспозиций к минимальной диаграмме на оболочке следующий: перечислите числа $1, \dots, n$ над прямоугольником. Для первой транспозиции скажем (*переменный ток*), перекиньте строку из a заканчивающийся белым кругом, и проведите горизонтальную линию до линии, опущенной из c , заканчивающийся черным кругом. Обратите внимание, что по нашим правилам для окружностей прослеживается путь от a до белого круга и поворачивает налево. Теперь есть две возможности: (i) если появляется в более поздней транспозиции, продлите линию вниз от черного круга (достигнув черного круга, поворачиваем направо): к белому кругу, если c — меньшее число в новой транспозиции; черный кружок, если большее число; (ii) если государство никогда больше не будет представлен ни в одной из последующих транспозиций, проведите линию от черного круга обратно к a . Продолжайте до тех пор, пока не будут учтены все транспозиции. Наконец, если число b не находится в транспозиции, то $\sigma(b) = b$ или $\sigma(b) = b + n$. В первом случае наведите линию на белый круг, а во втором на черный. Наконец, мы упростим диаграмму, исключив двудольные круги.

Пример этого процесса показан на рисунке.10, где мы видим, что декорированная перестановка [3, 5, 4, 6, 7] является декорированной версией обычного произведения смежных транспозиций: (12)(23)(24)(12)(25).

Обратите внимание, что мы можем восстановить все согласованные декорированные перестановки из диаграммы, следуя этим правилам: начиная с состояния α , в любом двудольном узле, проигнорируйте его и продолжайте прямо. В любом трехстороннем узле поверните налево, если узел белый, и направо, если черный. Этот путь закончится в каком-то состоянии. Затем $\alpha(\beta)$ равно этому состоянию, если оно больше, чем α ; если оно меньше, добавлять n чтобы получить $\alpha(\beta)$; и если $\alpha(\beta) = \alpha$ мы можем выбрать β или $\beta + n$.

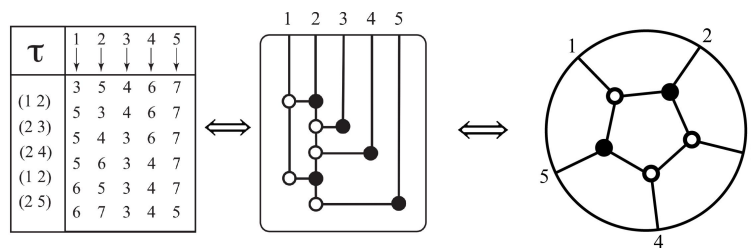


Рисунок 10. Построение уменьшенной диаграммы на оболочке посередине, соответствующей декорированной перестановке [3, 5, 4, 6, 7]. Справа — минимальная версия.

Это описание структур за пределами пространства-времени является лишь обзором, и для краткости опускает важные структуры, такие как ассоциэдр и космологический многогранник [23,88]. Если теория сознательных агентов призвана объяснить, как пространство-время и объекты возникают исключительно из динамики агентов, их комбинаций и слияний, то она должна каким-то образом быть связана с этими новыми структурами за пределами пространства-времени. Это позволило бы новой физике взять на себя часть тяжелой работы по построению моста от сознания к пространству-времени. Два ключевых открытия из физики определяют нашу предполагаемую связь.

Одним из ключевых выводов является следующее: глубочайшая структура за пределами пространства-времени, которая определяет физику, — это декорированная перестановка. Из декорированных перестановок можно построить сокращенные диаграммы на оболочке. Дифференциальные формы на этих диаграммах на оболочке приводят к появлению амплитуд рассеяния. (Без суперсимметрии нужны еще и спиральности, или массы и спины [24]).

Второй ключевой вывод заключается в том, что любая диаграмма на оболочке возникает в результате объединения диаграмм, содержащих отдельные трехногие черные или белые точки. Это единственные диаграммы трехчастичных взаимодействий, достаточные для расчета всевозможного взаимодействия [22].

Эти два открытия дают четкую цель теории сознательных агентов: ее динамика марковской цепи должна соответствовать декорированным перестановкам и вращениям. С помощью этой карты мы можем предложить точное соответствие между (1) многогранниками Маркова, которые описывают всю возможную динамику агентов, и (2) диаграммами на оболочке, которые генерируют амплитуды рассеяния.

Итак, какова карта цепей Маркова с декорированными перестановками? Недавно были опубликованы работы, посвященные цепям Маркова, положительным грассманианам и амплитудэдрам [85]. Однако преобразование цепей Маркова в декорированные перестановки остается открытой проблемой.

7. Соответствие между динамикой агента и физическими частицами.

В цепи Маркова с ядром ν вопрос, мы говорим, что состояние a общается с состоянием b если существует положительная вероятность того, что цепочка, начинающаяся в a достигает b за конечное время: у нас есть $\nu_{a,b} > 0$ для некоторого натурального числа $d \geq 0$. Учитывая состояние $a \in \mathcal{P} = \{1, \dots, p\}$, его класс общения $[a]$ состоит из всех государств b такой, что a общается друг с другом. Взаимная связь является отношением эквивалентности, поэтому взаимодействующие классы данного ядра разделяют пространство состояний. Поскольку государство a общается сам с собой (набор $\nu_{a,a} = 0$ выше), синглетон $\{a\}$ всегда является подмножеством взаимодействующего класса $[a]$. Когда $[a] = \{a\}$, то есть, когда $\nu_{a,a} = 1$, мы говорим, что a является поглощающий. цепочка, начинающаяся с a , остается в a . В более общем смысле, если цепочка возвращается к a бесконечно часто с положительной вероятностью мы говорим, что a является повторяющийся. Если состояние не повторяется, то оно переходящий. вероятность его возвращения в a бесконечно часто равно нулю, и это эквивалентно наличию $\sum_{d=0}^{\infty} \nu_{a,a}^{(d)} < \infty$ (ср. Теорема 1.5.3 из [89]).

Определение 2. Марковские декорированные перестановки. Учитывая ядро Маркова на n , мы определяем декорированную перестановку $\sigma: \overline{1, \dots, 2n} \rightarrow \overline{1, \dots, 2n}$ следующим образом:

- Если a является временным, установите $\sigma(a) = a$.
- Если a рекуррентно, пусть $\sigma(a)$ быть первым элементом $b > a$ из $\{1, \dots, 2n\}$, такой что последовательность $(a, a+1, \dots, b)$ между a и b содержит класс связи $[a]$ (напомним, что число $c > n$ представляет состояние $c \pmod{n}$).

В обоих случаях $\sigma(a) \leq a+n$; более того, $\sigma(a) \pmod{n}$ является биективным, поэтому у нас действительно есть декорированная перестановка. Обратите внимание также, что когда a поглощает, мы имеем $\sigma(a) = a+n$.

Например, цепь Маркова на 9 состояниях, в которой циклы (включая циклы периода 1) — (158), (2), (34), (6) и (79), будет представлена декорированной перестановкой [8, 11, 4, 12, 10, 15, 9, 14, 16]. Если бы состояние 2 было временным, то перестановка была бы [8, 2, 4, 12, 10, 15, 9, 14, 16]. Заметим попутно, что присвоение декорированных перестановок цепям Маркова легко обобщается до назначения декорированных перестановок произвольным графам, и это обобщение может оказаться полезным для анализа сетей.

Определение 3. Декорированные перестановки произвольных графов. Учитывая произвольный граф, набор узлов которого равен n , определите декорированную перестановку для каждого $a \in \overline{1, \dots, 2n}$ следующим образом: (1) если a не имеет связей, то положим $\sigma(a) = a$; (2) если a связано только само с собой, то положим $\sigma(a) = a+n$; и (3) в противном случае пусть $\sigma(a)$ быть первым элементом $b > a$ из $\{1, \dots, 2n\}$, такой, что (a, \dots, b) содержит все узлы сильно связного компонента графа, содержащего a . (Напомним, что число $c > n$ представляет узел $c \pmod{n}$ и что в сильно связном графе есть путь от каждого узла к любому другому узлу).

Марковский многогранник M_n представляет собой клеточный комплекс. Клетка S_n представляет собой набор всех марковских ядер $K \in M_n$ которые порождают декорированную перестановку σ . Например, M_2 имеет четыре ячейки, как показано на рисунке 11. Ядро идентичности, обозначенное красным диском, само по себе представляет собой ячейку с $\sigma = [3, 4]$, украшение идентичности, указывающее на то, что каждое состояние отображается само на себя. Ядро NOT, изображенное голубым диском, и вся внутренняя часть M_2 представляет собой клетку, в которой $\sigma = [2, 3]$, что указывает на взаимодействующий класс размера 2. Сегмент $I_1 = [0, 0]$ минус начало координат, обозначенное желтым цветом, представляет собой ячейку с $\sigma = [3, 2]$. Сегмент $I_2 = [0, 0]$ минус начало координат, обозначенное темно-синим цветом, представляет собой ячейку с $\sigma = [1, 4]$. Фигура 11 также показывает диаграммы оболочки, связанные с каждой ячейкой в M_2 .

Код декорированных перестановок для подпространств положительного грассманиана следующим образом. Для $k \leq n$, позволять S быть $k \times n$ матрица полного ранга k , представляющий элемент положительного грассманиана $G_{\geq 0}(k, n)$ (Напомним, что грассманиан $G(k, n)$ это набор k -мерные подпространств \mathbb{R}^n . Любое такое подпространство может быть представлено такой матрицей S , чей строки являются основой этого подпространства: хотя бы один $k \times k$ минор не равен нулю. *положительный грассманиан* $G_{\geq 0}(k, n)$ состоит из тех подпространств, которые можно представить матрицей V вызов чей $k \times k$ миноры ненулевые и одного знака. Тогда все репрезентативные матрицы такого подпространства будут обладать этим свойством). Повторите n столбцы S , чтобы произвести $k \times 2n$ матрица S^* . Украшенная перестановка σ связано с S присваивает каждому номеру столбца $a \in \{1, \dots, 2n\}$ значение $\sigma(a) > a$ следующим образом: если $S_{a,b} = 0$, $\sigma(a)$ это первый столбец b расширенной матрицы S^* , такой, что $S_{a,b}$ находится в промежутке (S_{a+1}, \dots, S_b) . Если, однако, $S_{a,a} = 0$, определить $\sigma(a) = a$.

Очевидно, множество полного ранга $k \times n$ матрицы с заданной декорированной перестановкой соответствуют уникальному подпространству \mathbb{R}^n и наоборот. Таким образом, декорированная перестановка, кодирующая сообщаемый класс размер цепи Маркова также кодирует подпространство размерности $n-1$ в положительном грассманиане. Поскольку взаимодействующие классы диктуют асимптотическое поведение цепей Маркова, это соответствие между взаимодействующими классами и подпространствами может лежать в основе неожиданного открытия о том, что стационарное распределение асимметричного простого процесса исключения зависит от комбинаторики ячеек положительного грассманиана [90], и что регулярные солитонные решения уравнения КП, определяющие закономерности взаимодействия мелких волн, зависят от ячейки положительной Грасс-

манниан, что отправная точка лежит в [91]. В свою очередь, положительный грассманиан отображается в амплитуэдр, на гранях которого затем производятся расчеты физических взаимодействий.

Это послужило основой для наших поисков соответствия между динамикой сознательных агентов и динамикой рассеяния в пространстве-времени.

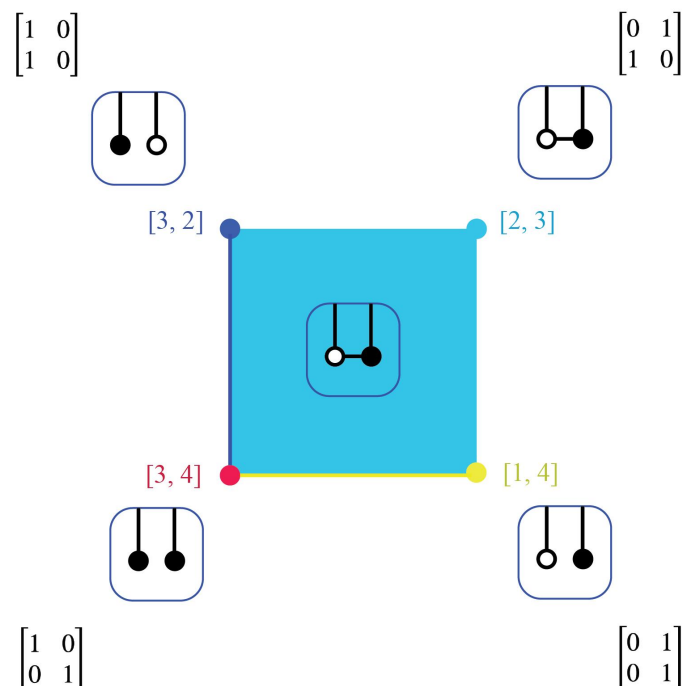


Рисунок 11. клеточный комплекс для M_2 (цветные диски, края и внутренняя часть квадрата) и связанные с ними диаграммы на оболочке (черные и белые точки).

Вспоминая рисунок 4, обратите внимание, что, за исключением угла НЕ, ячейки на рис. 11 именно сегментация M_n на различные возможные модели потока. Это говорит о том, что мы думаем о карте из M_n к своим ячейкам, которые являются взаимодействующими классами, как проекция через свою динамику на связанные с ними декорированные перестановки. Физика, как мы отмечали выше, находит фундаментальное значение декорированных перестановок: они ведут от своих диаграмм на оболочке к граням амплитуэдра и дифференциальным формам на этих гранях, которые дают амплитуды рассеяния. Последние представляют собой полное описание *любой* физической энергетический обмен на микроуровне. События физического рассеяния затем объясняются с точки зрения «частиц» в пространстве-времени, поэтому эти идеи наводят на мысль о том, что это шестивие или «проекция» по крайней мере из некоторых ячеек M_n , имеют значение взаимодействия частиц в физике: если да, то назовем такие проекции *физический*. То есть мы предполагаем *соответствие агент-частица*: частица (в пространстве-времени) — это аспект физической проекции динамики взаимодействующего класса сознательных агентов на грань амплитуэдра.

Наименьший нетривиальный коммуникативный класс — это один сознательный агент. И так, марковский многогранник $M_{дж}$, описывающая всю возможную динамику сознательного дж-агент — это наименьший многогранник Маркова, который может иметь проекции на динамику дж-рассеяние частиц в пространстве-времени. Все марковские многогранники M_k , $sk > j$, также могут иметь прогнозы на динамику дж-рассеяние частиц.

В качестве конкретного примера соответствия агент-частица рассмотрим марковский многогранник M_3 , который описывает всю динамику сознательных 3-агентов. Приложение Б представляет 17 различных декорированных перестановок для 27 вершин M_3 . Граф смежности для M_3 показан на рисунке 12. Приложение А представляет некоторую геометрическую структуру M_3 .

В этом случае, M_3 - наименьший многогранник Маркова с проекциями на две возможные диаграммы на оболочке для трехчастичных взаимодействий, показанные на рисунке 13. Мы предполагаем, что симплекс слияния тем самым определяет два типа потоков, которые соответствуют паре 3-частичных

амплитуды теории рассеяния. Будет интересно увидеть, как физические свойства, такие как масса, импульс и спин, возникают как проекции многогранников Маркова.

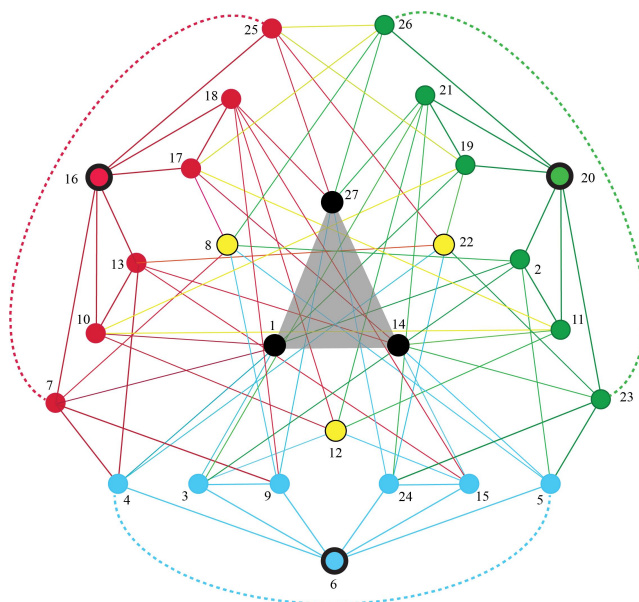


Рисунок 12. Граф смежности многогранника Маркова M_2 . Вершины пронумерованы в соответствии с Приложением Б. Серый треугольник представляет симплекс полного слияния. Синие точки — вершины комплекса частичного слияния.

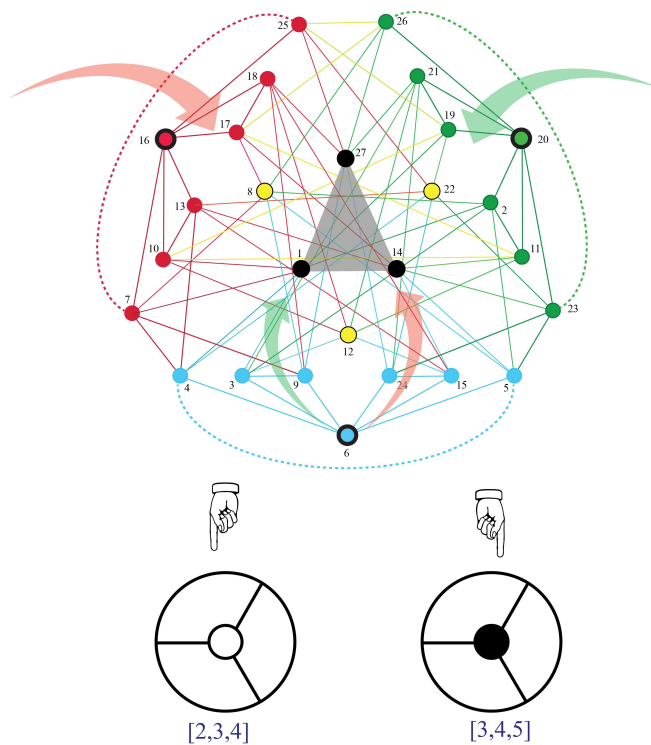


Рисунок 13. Поток в многограннике Маркова M_2 . Компьютерное моделирование показывает, что, аналогично ситуации в M_2 , имеется два типа течения по обе стороны от симплекса полного слияния, вытекающие из тождества (6), с одной стороны, и двух максимальных нарушений (16 и 20), с другой. Мы предполагаем, что эти два типа потоков находятся в указанном (указывающими руками) отношении к паре трехчастичных амплитуд теории рассеяния.

8. Обсуждение

Ньютоновская физика — прекрасная теория, имеющая практические применения, которые исследуются и используются по сей день. Однако это не принципиально. В 1905 году с публикацией статьи Эйнштейна по специальной теории относительности ее правление закончилось. Для тех, кто ищет фундаментальную теорию, пришло время двигаться дальше.

Однако научные теории имеют свою собственную движущую силу. В 1922 году, когда Эйнштейн получил Нобелевскую премию, комитет отметил, что награда была вручена «без учета того значения, которое будет придано вашим теориям относительности и гравитации после того, как они подтвердятся в будущем» [92].

Квантовая теория поля и теория гравитации Эйнштейна — прекрасные теории, имеющие практическое применение, которые, вероятно, будут исследоваться и использоваться в течение столетий. Однако они, как и само пространство-время, не являются фундаментальными. Для тех, кто ищет фундаментальную теорию, пришло время двигаться дальше. Физика действительно продвинулась вперед, предложив, например, теорию струн [93], петлевая квантовая гравитация [94], причинные множества [95], амплитуды [22] и космологические многогранники [23,88].

Однако научные теории сознания и проблема комбинирования не продвинулись дальше. Физикалистские, дуалистические и панпсихистские теории предполагают, что пространство-время является фундаментальным. Функционалистские теории могли бы, в принципе, избегать пространства-времени и искать воплощения в другом месте. [96]. Однако функционалисты молчаливо, а часто и явно, предполагают реализацию в пространстве-времени. Мы предполагаем, что, пока функционалисты будут искать воплощение в пространстве-времени, вопрос, почему и каково это, чтобы что-то имело разум, всегда будет ускользать от них.

Пространственно-временной рецидив имеет последствия. На сегодняшний день ни одна теория научного изучения сознания не объясняет какой-либо конкретный сознательный опыт. Какой интегрированной информацией должен быть вкус шоколада и не может быть вкусом ванили? Каким организованным коллапсом квантовых состояний должен быть запах кофе и не может быть запахом кокоса? В каком состоянии глобального рабочего пространства должен быть звук арфы и не может быть звуком флейты? Ответа пока не получено. Эту неудачу предвидел Лейбниц в своем знаменитом «Аргументе Милля»: «Нужно, однако, признать, что восприятие и то, что от него зависит, необъяснимы механическими причинами, то есть фигурами и движениями. Предположим, что существует машина, структура которой производит мысль, ощущение и восприятие, мы могли бы представить ее увеличенной в размерах с теми же пропорциями, пока кто-то не сможет войти в ее внутренность, как если бы он попал в мельницу. Теперь, вникнув в это, он обнаружит только части, работающие друг на друга, но никогда не найдет ничего, что могло бы объяснить Восприятие. Следовательно, восприятие следует искать в простой субстанции, а не в сложном и не в машине. Более того, в простой субстанции нет ничего, кроме восприятий и их изменений. Кроме того, только в них могут заключаться все внутренние действия простой субстанции» [65]. Мы согласны с Лейбницем. Любая теория, которая сводит сознание к механизмам, включающим состояния, конфигурации или процессы объектов, не сможет объяснить какой-либо конкретный сознательный опыт.

Стивен Пинкер признает эту неудачу: «Наша лучшая наука говорит нам, что сознание состоит из глобального рабочего пространства, представляющего наши текущие цели, воспоминания и окружение, реализованного в синхронизированных нейронных импульсах в лобно-теменных схемах. Однако последний кусочек теории — то, что субъективно кажется чем-то вроде такой схемы — возможно, придется обусловить как факт реальности, где объяснение прекращается» [97]. Действительно, современные теории сознания не объясняют сознательный опыт, они его обуславливают.

Пинкер объясняет, почему. «Это не должно вызывать полного удивления. Как заметил Амброуз Бирс в «Словаре дьявола», разуму нечего познавать себя, кроме самого себя, и он никогда не может чувствовать себя удовлетворенным тем, что понимает глубочайший аспект своего собственного существования, свою внутреннюю субъективность» [97]. Действительно, возможно, что субъективный опыт не может быть объяснен и должен быть обусловлен. Если да, то давайте оговорим это и, с отсылкой к Уильяму Оккаму, ничего больше. Сформулируйте динамику переживаний и выведите ее, а не предусмотрите пространство-время и объекты как проекцию динамики. Это проект теории

сознательные агенты. С этой целью в данной статье предлагается карта динамики агентов через амплитуду в пространство-время.

Этот подход согласуется со следующим тезисом Пинкера. «Что бы мы ни думали о сложной проблеме сознания, постулирование нематериальной души совершенно бесполезно. Во-первых, он пытается разгадать тайну еще большей тайны. Во-вторых, оно ошибочно предсказывает существование паранормальных явлений» [97]. Действительно, постулирование нематериальной души не предлагает формальной теории и, следовательно, не помогает науке о сознании. Это вводит дуализм и, таким образом, влечет за собой паранормальные явления. Теория сознательных агентов, напротив, является монистической и точной. Сознание — это не призрак в машине. Вместо этого законы физики и специальных наук сами по себе являются проекцией динамики сознательных агентов. Новые законы могут возникнуть в результате изучения сознательных агентов. Однако это будут формальные достижения с проверяемыми последствиями (например, переход от классической теории к квантовой), а не специальные постулаты.

В этой статье мы обрисовали, как пространство-время и частицы могут возникнуть как проекция динамики сознательных агентов. Само по себе это ничего не говорит нам о *опыте* времени, которое течет от определенного прошлого к настоящему моменту к открытому будущему. Поэтому поучительно посмотреть, как энтропийное, т. е. направленное вперед, время может аналогичным образом возникнуть в теории сознательных агентов.

Несложно построить однородную марковскую динамику: $ИКС$, сознательных агентов с постоянной энтропией, $ЧАС(ИКС)$. То есть,

$$ЧАС(ИКС_n) = ЧАС(ИКС_{n-1}), \forall n. \quad (32)$$

Здесь, n относится к числу шагов обновления в динамике сознательных агентов (ср. уравнение (6)), а не к количеству задействованных агентов.

Эта динамика не имеет предпочтительного направления. Однако любая проекция этой динамики через условную вероятность порождает энтропийную стрелу времени [98]. То есть, если мы при условии, скажем, $ИКС_1$, затем

$$ЧАС(ИКС_n | X_1) \geq ЧАС(ИКС_{n-1} | X_1), \forall n. \quad (33)$$

Доказательство. Доказательство простое. Мы отмечаем, что

$$ЧАС(ИКС_n | X_1) \geq ЧАС(ИКС_n | X_1, ИКС_2). \quad (34)$$

(Кондиционирование снижает неопределенность). Однако по марковскому свойству имеем

$$ЧАС(ИКС_n | X_1, ИКС_2) = ЧАС(ИКС_n | X_2), \quad (35)$$

и по однородности,

$$ЧАС(ИКС_n | X_2) = ЧАС(ИКС_{n-1} | X_1). \quad (36)$$

Из последних трех уравнений следует, что уравнение (33) держится. \square

Таким образом, теория сознательных агентов может обнаружить, что энтропийное время не является фундаментальной особенностью реальности, а всего лишь артефактом проекции. Объяснение «стрелы времени» как возникающего свойства энтропийных систем не является новой идеей, например: [99, 100]. Однако, в отличие от большинства подходов, мы не предполагаем, что наше восприятие стрелы времени каким-то образом отражает физическую эволюцию (на самом деле, эволюция посредством естественного отбора говорит нам, что это маловероятно), но что она возникает как проекция динамика сознания, которая *лежит в основе* физическая эволюция. Тот же формализм (т.е. марковские сети сознательных агентов), который мог бы объяснить события рассеяния в пространстве-времени, мог бы также пролить свет на переживаемую временность.

В ходе эволюции организмы конкурируют за ресурсы, чтобы противостоять разрушительному воздействию энтропии. Фундаментальный ограниченный ресурс – это время. Может ли быть так, что эта эволюционная структура является артефактом проекции динамики сознательных агентов, в которой нет ни ограниченных ресурсов, ни конкуренции? Это становится техническим вопросом теории сознательных агентов, требующим спецификации динамики агентов и

точное отображение этой динамики в пространстве-времени. Нам потребуется получить эволюцию как проекцию динамики агентов с той же строгостью, с которой мы получаем, скажем, классическую физику как предельный случай квантовой теории.

Вклад автора: Концептуализация, DDH, CP и RP; методология и формальный анализ, DDH и CP; расследование, DDH, CP и RP; письмо – подготовка оригинального проекта: DDH; письмо — Приложение A : КП; письмо — Приложение B: ДДХ; написание — рецензирование и редактирование, DDH, CP и RP. Все авторы прочитали и согласились с опубликованной версией рукописи.

Финансирование: Это исследование не получило внешнего финансирования.

Благодарности: Мы благодарим Джо Арпая, Бена Неппера и Маниша Сингха за комментарии и дополнения к предыдущему проекту, а RP благодарит Мюнхенский центр математической философии и Ассоциацию науки о математическом сознании за институциональную поддержку. Мы также благодарим анонимных рецензентов за их комментарии.

Конфликт интересов: Спонсоры не играли никакой роли в разработке исследования; при сборе, анализе или интерпретации данных; в написании рукописи; или в решении опубликовать результаты.

Сокращения

В данной рукописи использованы следующие сокращения:

ИТП Теория восприятия интерфейса

Приложение А. Геометрия и динамика марковских многогранников

Чтобы понять слияние агентов и его возможные связи с физикой элементарных частиц, нам необходимо изучить геометрию и динамику марковских многогранников. M_n , произвольного порядка n . В этом приложении мы положим начало такому исследованию. Приведем некоторые определения и факты для общего n , но в основном сосредоточимся, как и в основной части статьи, на примерах M_2 и M_3 соответственно двух и трех взаимодействующих сознательных агентов. Доказательства некоторых утверждений приведены в последнем подразделе.

Наша главная цель здесь — продемонстрировать, насколько уже сейчас теория трех агентов намного богаче теории двух агентов; анализ здесь основан на соображениях, изложенных в основной части этой статьи. Здесь мы применяем наивный подход к анализу; мы ожидаем в будущей работе более глубокого исследования произвольных n , применяя общую теорию выпуклых многогранников [101–103]. Помимо описания аспектов геометрии M_3 , мы положили начало выявлению связи между геометрией и асимптотической динамикой. Мы надеемся позже объявить о дальнейших результатах по этому вопросу, как с помощью компьютерного моделирования, так и с помощью теоретического анализа.

Приложение А.1. Геометрическая структура марковских многогранников

$A_n \times n$ матрица стохастической, а Марковское ядро или матрица перехода, если ее элементы являются действительными числами от 0 до 1, а сумма ее строк равна 1. Мы можем думать о стохастической матрице как о матрице перехода цепи Маркова на пространство состояний $\mathcal{P} = \{1, \dots, n\}$. Для данного n , набор M_n всех таких матриц образует компактное выпуклое множество \mathcal{V}_n при обычных операциях сложения матриц и скалярного умножения. *крайние точки, или вершины*, выпуклого множества — это те его элементы, которые не являются выпуклыми комбинациями каких-либо других. В M_n вершины — это стохастические матрицы, каждая строка которых представляет собой *единица* строка: строка с одной записью 1 (а все остальные записи — 0). Видно, что M_n есть множество множества выпуклых комбинаций его вершин. Следовательно, мы называем M_n тот *Марковский многогранник степени n* (Поскольку все вершины имеют целые координаты, это *интеграл* многогранник, и мы увидим, что это тоже *простой*: каждая его вершина соединена граничными ребрами с числом других вершин, равным размерности $(n - 1)$ из M_n).

Например, элементы M_2 и M_3 могут быть описаны соответственно матрицами форма

$$\begin{bmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1-a-b & a & b \\ d & 1-b-g & c \\ e & ж & 1-e-e \end{bmatrix}, \quad (A1)$$

где все записи находятся между 0 и 1. Для 2×2 стохастическая матрица, необходимо указать два параметра; M_2 Таким образом, это образ двумерного доменного многообразия при аффинном отображении 1:1: декартово произведение двух копий, по одной на каждую строку, стандартного симплекса S_1 размерности 1. M_2 таким образом, является двумерным многообразием $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^4$. Сходным образом, M_3 - это изображение шестимерной области под аффинным отображением 1:1: декартово произведение трех копий, по одной на каждую строку, стандартного симплекса S_2 размерности 2. Таким образом, M_3 представляет собой 6-мерное многообразие $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^9$. Для удобства рисунок A1 воспроизводит изображение M_2 приведено ранее на рисунке 4.

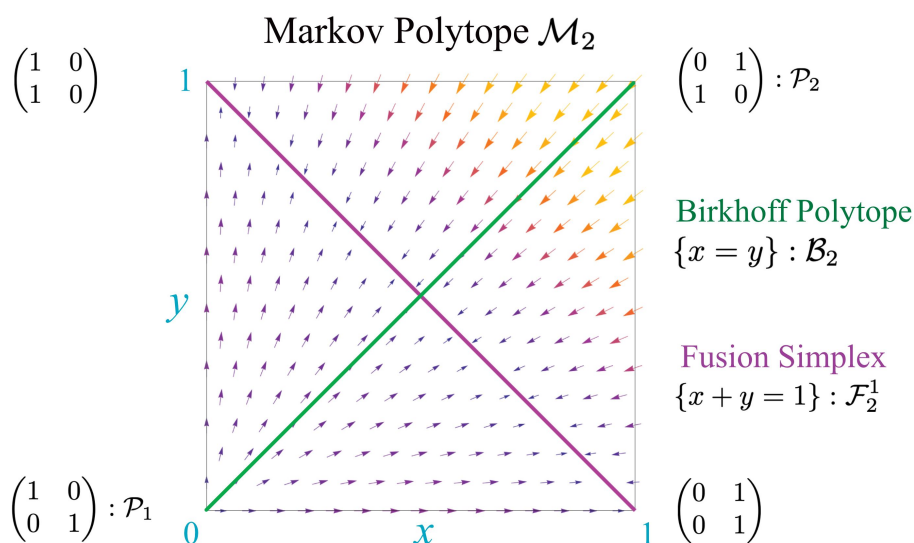


Рисунок A1. Пространство параметров для M_2 со слитым многогранником, многогранником Биркгофа, периодическими точками и динамикой.

Рассмотрим общий многогранник M_n . Для α, β, γ обозначая целые числа n мы определяем пространство параметров $\mathcal{P}_n = \{ (I_{\alpha\beta\gamma}^{d_1, d_2, \dots, d_n}) \mid I_{\alpha\beta\gamma}^{d_1, d_2, \dots, d_n} \geq 0; \forall \alpha, \sum_{d_1, d_2, \dots, d_n} I_{\alpha\beta\gamma}^{d_1, d_2, \dots, d_n} \leq 1 \}$, который является подмножеством $\mathbb{R}^{(n-1)}$. Биективное отображение $\mathcal{P}_n \rightarrow M_n$ затем дается

$$\begin{pmatrix} (1 - \sum_{d_1, d_2, \dots, d_n} I_{\alpha\beta\gamma}^{d_1, d_2, \dots, d_n}) I_{\alpha\beta\gamma}^1 & \dots & \dots & \dots & I_{\alpha\beta\gamma}^1 & I_{\alpha\beta\gamma}^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ I_{\alpha\beta\gamma}^1 & I_{\alpha\beta\gamma}^2 & \dots & (1 - \sum_{d_1, d_2, \dots, d_n} I_{\alpha\beta\gamma}^{d_1, d_2, \dots, d_n}) & I_{\alpha\beta\gamma}^2 & I_{\alpha\beta\gamma}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ I_{\alpha\beta\gamma}^n & I_{\alpha\beta\gamma}^{n-1} & \dots & \dots & I_{\alpha\beta\gamma}^n & (1 - \sum_{d_1, d_2, \dots, d_n} I_{\alpha\beta\gamma}^{d_1, d_2, \dots, d_n}) \end{pmatrix}$$

В общем, M_n таким образом, является аффинно вложенным многообразием размерности $(n-1)$ в $\mathbb{R}^{(n-1)}$. Опять же, это выпуклая оболочка его крайних точек или вершин. Это матрицы со всеми единичными строками, т. е. строки с единственным единичным элементом: таким образом, существуют n вершины в M_n . 4 вершины M_2 показаны на рисунке A1. 27 вершин M_3 расположены на рисунке A2 (Нумерация была присвоена программой в MATHEMATICA , чтобы систематически генерировать их, начиная с номера 1; мы расположили и раскрасили матричные числа по «расстоянию» от единицы, т. е. по количеству строк в единице, которые необходимо изменены для перехода к новой матрице: синий означает одну строку, зеленый — две, красный — три строки. Эта нумерация оказывается несколько пророческой: см. предложение 2 и пример перед ним).

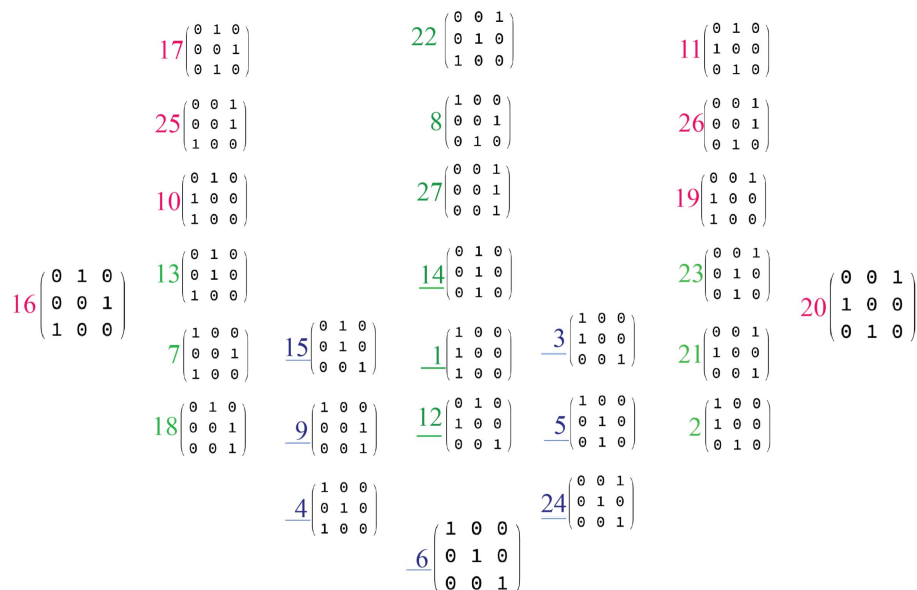


Рисунок А2.Вершины M_3 .

Учитывая набор I ксточек векторного пространства, будем говорить, что его выпуклая оболочка $C(I)$ является *созданный* по этому набору. Как M_n – выпуклый многогранник, его границу обозначим ∂M_n , состоит из *лица*: максимальные плоские области, порожденные подмножеством вершин. Это самостоятельные многогранники, а их грани являются подмножествами материнского многогранника. Среди граней 0-мерности являются вершинами, или 0-мерными *лица*, одномерные грани *края*, или 1- *лица*, те, размер которых на 1 меньше максимального, являются *ребры*, а те, что имеют максимальную размерность, называются *грани*. *Измерением* многогранника на 1 больше размерности его граней (это понятие размерности эквивалентно обычному определению размерности: выпуклый многогранник имеет размерность r если оно гомеоморфно r -мерный единичный шар).

Две вершины *соседний* если они соединены ребром многогранника: порожденный ими отрезок не содержится внутри какой-либо другой грани; то же самое, что ни одна из его точек не является выпуклой комбинацией любой другой пары вершин. Каждая грань также является многогранником; его собственные лица среди лиц M_n . Если две грани имеют общую (малоразмерную) граничную грань, мы говорим, что они *примыкают* друг друга.

Предложение А1. Две вершины являются смежными, если они различаются только положением единицы измерения в одной строке, а остальные строки идентичны.

Множество вершин, смежных с данной вершиной V будет называться *колпачок* S_{Viz} . Как на рисунке А1 колпачки в M_3 имеют по 2 вершины каждая, и мы увидим, что шапки M_3 имеют по 6 вершин. По предложению А1 шапки M_n имеют $n(n-1)$ вершины каждая.

Приведенное выше описание многогранника как выпуклой оболочки его вершин называется V -описание. Эквивалентным описанием является $ЧАС$ -описание в терминах множества полупространств, ограничивающих многогранник. Каждое такое полупространство представляет собой линейное неравенство в координатах пространства параметров (при M_n , Этор $n(n-1)$) и грани многогранника задаются путем указания определенных их подмножеств как *равенства*, при условии, что результирующее множество ограничено. Например, вспоминая уравнение (А1), M_3 можно описать как множество, ограниченное четырьмя полупространствами, которые можно разделить на две группы по два неравенства в каждой:

$$a \geq 0, 1 - a \geq 0$$

и

$$b \geq 0, 1 - b \geq 0$$

Мы получаем лицо M_3 преобразуя в равенства, *один* неравенств хотя бы из одной группы, оставив остальные неравенства без изменений. Если это выполняется в обеих группах,

мы получаем одну из четырех разных 0-граней; если ровно в одной группе мы получаем одну из четырех разных 1-граней, граней 2-мерного многогранника M_2 . Это изображено на рисунке A1.

Чтобы найти лица M_3 , мы следуем тому же принципу на трех ограничивающих его группах неравенств, превращая в равенства, по крайней мере, в одной группе не более *двух* неравенств (поскольку если $l-1$ вход подряд стохастической $n \times n$ матрица равна нулю, оставшаяся запись должна быть 1). Если вспомнить вторую матрицу уравнения (A1), то группы неравенств будут следующими:

$$\begin{aligned} a \geq 0, b \geq 0, 1 - a - b &\geq 0 \\ c \geq 0, d \geq 0, 1 - c - d &\geq 0 \\ e \geq 0, ж \geq 0, 1 - e - ж &\geq 0 \end{aligned} \tag{A2}$$

Итак, теперь мы можем выделить следующие возможности для разных типов лиц каждого измерения в M_3 . Фигура A3 показаны примеры каждого типа. Типы проиллюстрированы в примере A1, а в предложении A2 подробно описаны формы и числа каждого типа.

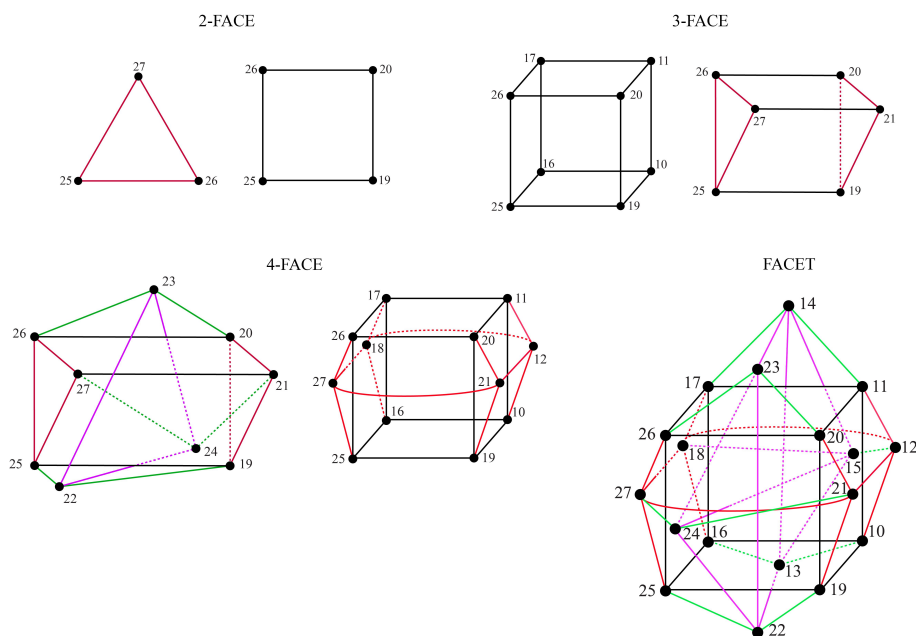


Рисунок A3. Примеры типов r -лица M_3 размера $p = 1, \dots, 5$. Нумерация как на рисунке A2. Есть две 4-грани с 6 и 8 вершинами соответственно: их собственные грани включают в себя предыдущие 3-грани, дополнительно окруженные внешним «охватывающим» треугольником и соединенные с ним соответственно; или две призмы, соединенные квадратом. 5-грань генерируется 12-вершинной 4-гранью с двумя фиолетовыми обертывающими треугольниками (13-14-15 и 22-23-24) и их соединениями с 4-гранью и друг с другом.

Пример A1. Лица M_3

- $S_{\{25\}}$ имеет форму $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ -, который генерирует 0-грань или вершину 0
- $S_{\{25, 27\}}$ имеет форму $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ e & 0 & 1-e \end{pmatrix}$ -, который генерирует 1-грань или ребро
- $S_{\{25, 26, 27\}}$ имеет форму $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ e & ж & 1-e-ж \end{pmatrix}$ -, который генерирует двусторонний треугольник
- $S_{\{25, 26, 20, 19\}}$ имеет форму $\begin{pmatrix} 1-c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ e & 1-e & 0 \end{pmatrix}$ -, который генерирует двусторонний квадрат 0

- $$\begin{matrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1-d & \\ e & ж & 1-e-e \end{matrix}$$

С{25, 26, 27, 19, 20, 21} имеет форму-д, который генерирует трехгранный треугольник-
Ларская призма
- $$\begin{matrix} 0 & a & 1-a \\ 0 & 0 & \\ e & 1-e & \end{matrix}$$

С{25, 26, 10, 11, 16, 17, 19, 20} имеет форму-1-с, который генерирует 0
трехгранный куб
- $$\begin{matrix} 0 & 0 & 1 \\ 1-v-g & & c \\ e & ж & 1-e-e \end{matrix}$$

С{19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27} имеет форму-д, какой род-
съедает 9-вершинную 4-грань
- $$\begin{matrix} 0 & a & 1-a \\ 0 & 1-d & \\ e & ж & 1-e-e \end{matrix}$$

С{25, 26, 27, 10, 11, 12, 16, 17, 18, 19, 20, 21} имеет форму-д, какое поколение-
создает 12-вершинную 4-грань
- $$\begin{matrix} 0 & a & 1-a \\ -d & 1-v-g & c \\ e & ж & 1-e-e \end{matrix}$$

С{10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27} имеет форму-
д, который генерирует 18-вершинную 5-грань или фасет.

Эти примеры подсказывают, как подсчитать вектор лица, вектор, компоненты которого подсчитывают количество граней ж, а размерами еще: количество вершин каждого типа грани и сколько каждого типа:

Предложение А2. Лица Мз следующие:

- 0-грани или вершины: наборы матриц в Мз с 6 общими нулевыми записями. Это синглтоны и есть f0= 27 вершины.
- 1-грани или ребра: это наборы матриц в Мз с 5 общими нулевыми записями. Это отрезки линий между соседними вершинами; есть ж1= 81 края.
- 2-грани: это наборы матриц с четырьмя общими нулевыми элементами. Существует два типа таких лиц:
 Треугольники: три вершины образуют треугольную грань, если есть одна строка, в которой они различаются: вершины треугольной грани имеют все четыре нуля в двух строках. Каждая вершина прикреплена через колпачок к трем треугольным граням. Всего 27 треугольников, из которых никакие два не примыкают друг к другу.
 Квадраты: они генерируются четырьмя вершинами и имеют по одному нулю в двух строках, а оставшаяся строка - с двумя нулями. Всего 81 квадрат, поэтому f2= 108.
 Эквивалентно, любые две вершины, отличающиеся ровно двумя строками, будут лежать в единственном квадрате. Каждая вершина занимает 12 квадратов.
- 3-грани: это наборы матриц с тремя общими нулевыми элементами. Существует два типа таких лиц:
 Треугольные призмы создаются из 6 вершин и с нулями в двух строках; имеется 54 треугольных призмы.
 Кубы создаются из 8 вершин с одним нулем в каждой из трех строк; есть 27 кубиков и f3= 81.
- 4-грани, или гребни: существует два типа граней с двумя общими элементами нулевой матрицы. 9-вершинные грани матриц в Мз с двумя нулевыми записями в одной строке. Таких лиц 9. 12-вершинные грани матриц с двумя нулевыми элементами в двух разных строках. Таких лиц 27, так что ж4= 36.
- 5-граней или фасетов: наборы, порожденные 18 вершинами, матриц с 1 общим нулевым элементом. Есть ж5= 9 такие лица.

Обратите внимание, что, как и в случае с любым выпуклым многогранником, каждая грань снова является многогранником, чьи грани, в свою очередь, сами являются гранями меньшей размерности Мз. Например, как на рисунке А3, мы можем

видим, что 3-грань с 6 вершинами порождается двумя треугольными гранями, «перенесенными» вдоль трех квадратных граней (или наоборот), а куб с 8 вершинами представляет собой квадрат, перенесенный вдоль четырех квадратных граней. 9-вершинная 4-грань представляет собой «квадраттреугольную призму», поскольку она состоит из четырех треугольных призм, свернутых вместе, а другая 4-грань состоит из двух треугольных призм, соединенных кубом. Точно так же 5-грань является продолжением некоторых предыдущих граней вдоль некоторых других.

Заметим также, что наш шестимерный многогранник M_6 встроены в $d=9$ удовлетворяет, как и должно быть, *Отношение Эйлера - Пуанкаре*

$$\chi_0 - \chi_1 + \dots + (-1)^{d-1} \chi_{d-1} = 1 + (-1)^d \tag{A3}$$

Чтобы понять марковскую асимптотику, мы теперь идентифицируем некоторые выделенные подмножества M_n .

Многогранник Биркгофа и периодические множества. $n \times n$ матрица B_n называется *двойной стохастической* если все записи неотрицательны и сумма каждой строки и каждого столбца равна 1. Подмножество всех дважды стохастических матриц составляет *Многогранник Биркгофа* B_n . Это подмногогранник M_n

созданный подмножеством $n!$ принадлежащих n вершины M_n : 2 за M_2 и 6 для M_3 . Вершины многогранника Биркгофа при матричном умножении изоморфны симметрической группе S_n перестановок на множестве n объектов. Например, в стандартной переписке транспозиция $(13) \in S_3$, меняющий местами объекты 1 и 3, соответствует матрице

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Поскольку вершины B_n образуют конечную группу, каждый из ее элементов циклический. Тогда в качестве матриц перехода для цепей Маркова вершинные матрицы B_n являются *периодическими*. $n \times n$ матрица B_n является периодическим, если для некоторого целого числа k , $B_n^k = I$, хотя бы такое k бы существовало. *периодический набор* P_n состоит из всех периодических стационарных стохастических $n \times n$ матрицы и k -периодический набор P_n состоит из периода матрицы в P . Для всех n , существует только один период 1 матрица: $P_n = \{I\}$. Определитель *расстройств* S_n , быть перестановкой, не оставляющей объект на свое место. Затем, P_n соответствует комплексу нарушений в S_n .

В M_2 , существует только одна матрица нарушений: оператор «НЕ». $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in P_2$

B_2 — это отрезок между НЕ и единичной матрицей (как на рисунке A1).

В M_3 , есть две вершины в P_3 : те, которые соответствуют двум расстройствам в S_3 . Есть еще три вершины в P_3 , который мы называем *зеркалом* матрицы. Вместе с тождеством, мы определили все шесть вершин B_3 , пронумерованы, как на рисунке A2:

Вершины B_3

$$\begin{matrix} \begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \\ \text{ПЗ: ЧЕТНЫЙ 16 : -} & \text{ПЗ: НЕЧЕТНЫЙ 20 : -} \end{matrix} \tag{A4}$$

$$\begin{matrix} \begin{matrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} & \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{matrix} \\ \text{ПЗ: Зеркала 22 : -} & \text{ПЗ: 12 : -} & \text{ПЗ: 8 : -} \end{matrix} \tag{A5}$$

$$\begin{matrix} \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \\ \text{ПЗ: Личность 6 : -} \end{matrix} \tag{A6}$$

Периодические матрицы, будучи обратимыми, имеют полный ранг и, следовательно, любые периодические матрицы *вершин* B_n . Периодичность в M_n происходит только в вершинах: никакая выпуклая комбинация периодических стохастических матриц не может быть периодической. Мы предполагаем, что это справедливо для всех n .

Гипотеза A1. P_n — это множество вершин B_n , набор всех периодических стохастических матриц: P_n — *нкор* — отвечает на набор p -циклических нарушений. *Вилка* $W_n = \{1, \dots, n, p_k\}$ состоит из всех матриц Биркгофа соответствующие перестановкам $s \in S_n$ следующего вида: пусть $s = s_1 s_2 \dots s_l$, где s_i с точностью до порядка являются единственным разложением s на его циклы. Пусть k_i быть i см длин

циклы в s . Затем, P_k состоит из матриц Биркгофа, соответствующих перестановкам $s \in S_n$, такой, что $k \in s^{-1}(k)$ (Для $n=2$, это согласуется с тем фактом, что число нарушений k вещей равно $k \lfloor e \rfloor$, где e — основание натурального логарифма, $\lfloor \cdot \rfloor$ — целое число, ближайшее к x).

Стационарный комплекс и термоядерный комплекс. Будем обращаться к идемпотентной стохастической матрице A , т. е. удовлетворяющей $A^2 = A$, как *стационарной* (Термин «стационарный» относится к тому факту, что цепь Маркова с такой матрицей перехода A стационарна: если цепь имеет начальное состояние, заданное формулой μ , мера в своем пространстве состояний, последующие состояния постоянны и равны μA). *Стационарный комплекс* S_n состоит из всех стационарных матриц в M_n . Следующее предложение гласит, что матрицы ранга 1 в M_n составляют многогранник в S_n : это *слияние многогранник* Φ_n . Когда $n=2$ это вместе с единицей заполняет стационарное многообразие: $S_2 = \Phi_2 \cup \{I\}$ (см. рисунок A1). Его пересечение с многогранником Биркгофа является одноэлементным, состоящая из матрицы, каждая строка которой является ее стационарным распределением

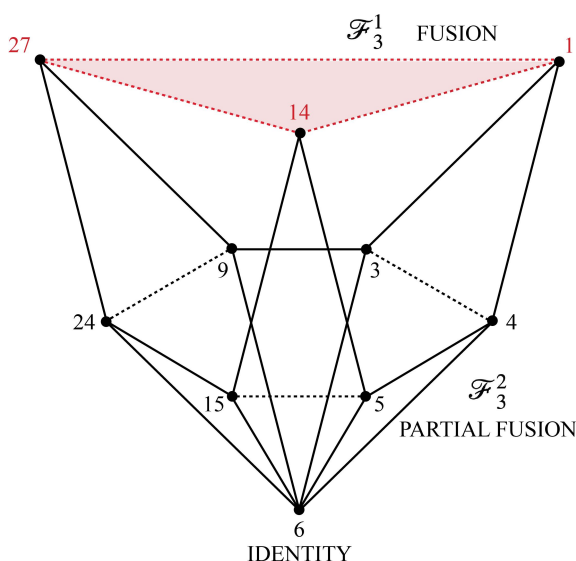


Рисунок A4. Стационарные стохастические элементы M_3 . Сплошные линии — края; пунктирные линии — это сегменты внутри квадратной грани M_3 . Многогранник слияния Φ_1 является двумерным симплексом, а Φ_2 — комплекс частичного слияния представляет собой объединение 6 сегментов.

В M_3 , многогранник слияния Φ_1 в предложении A3 ниже показано, что это 2-симплекс. За исключением вершин, этот многогранник целиком лежит внутри многогранника M_3 , а его пересечение с многогранником Биркгофа состоит из одной матрицы, каждая строка которой является ее стационарным распределением $1/3 \ 1/3 \ 1/3$. Появились дополнительные стационарные матрицы, а именно *комплекс частичного слияния* Φ_2 который состоит из матриц ранга 2 в стационарном многообразии S_3 . Коллекция стационарных стохастических матриц представляет собой объединение этих непересекающихся множеств: $S_3 = \Phi_3 \cup \Phi_2 \cup \{I\}$. Это изображено на рисунке A4, где сплошные линии — это (граничные) края из M_3 а пунктирные линии — внутри (нумерация вершин как на рис. A2).

На рисунке это показано в виде одномерной кривой, состоящей из 6 сегментов между вершины. При этом он попарно соединен с многогранником (полного) слияния Φ_1 — 3, 2-размерный симплекс. Обратите внимание, как и в предложении A2, на три треугольные грани, выходящие из тождества. Кроме того, 3 из 12 квадратных граней, включающих идентичность, фактически соединяют идентичность, как показано на рисунке, с многообразием полного слияния.

Предложение A3.

- (i) Многогранник слияния Φ_1 является $(n-1)$ -мерный симплекс: выпуклая оболочка n -вершины матрицы $\{e^i\}$, где e^i имеет все 1 в i -м столбце и 0 во всех остальных местах. За исключением своих вершин, многогранник слияния полностью лежит внутри M_n .
- (ii) Вершины частичного комплекса слияния Φ_2 представляют собой вершину идентичности и Φ_2 является граница шестиугольника состоит из 6 линейных отрезков между ними (три из которых являются

единица квадрата $0 \leq a, b \leq 1$. Тогда 2×1 матрица $\mu = \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix}$ является стохастическим вектором, если $0 \leq a, b, \leq 1, a + b = 1$. Следующее относится к предложению A3 к $n = 2$: здесь комплекс слияния — это просто многогранник слияния:

Лемма A2. Если вопрос $\in M_2$ стационарен, то либо:

- (i) Q находится в многограннике слияния и имеет равные строки: он имеет ранг 1, и каждая строка Q является уникальным стационарным вектором для Q , или
- (ii) Вопрос $= I$ и каждый стохастический вектор стационарен для Q .

Теорема A1.

- (i) Многогранник слияния Φ_2 соответствует отрезку $\{(x, y) \mid x, y \in [0, 1]; x + y = 1\}$, включая концевые точки.
- (ii) Многогранник Биркгофа B_2 соответствует отрезку $\{x \in [0, 1] \mid x \geq 1/2\}$, включая концевые точки. Его пересечение с многогранником слияния является одноэлементным $\{1/2, 1/2\}$.
- (iii) Периодическое множество ω_2 соответствует [зеленый аппе] правый угол $Q(1, 1)$. Его полномочия не сходятся, но его стационарная мера равна $1/2, 1/2$.
- (iv) Степени любой матрицы, кроме единицы и периодической точки, сходятся к слитому комплексу монотонно вдоль линии между ней и единицей. В частности, степени $Q(x, y)$, для $(x, y) \in (0, 1) \times (0, 1)$, сходятся к стационарной матрице, заданной выражением

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{вопрос}(Икс, й)^n = \text{вопрос} \begin{bmatrix} \frac{Икс \cdot й}{Икс + й} & \frac{й}{Икс + й} \\ \frac{Икс}{Икс + й} & \frac{Икс}{Икс + й} \end{bmatrix} \quad (A9)$$

Нам хотелось бы изучить, какие аспекты закономерностей мы видим в M_2 сохраняются в более высоких измерениях и какие новые виды поведения возникают. Здесь мы начинаем это исследование с нуля. Рассмотрим рисунок A5, что указывает на некоторую динамику в M_3 где, для простоты мы не указали никаких смежностей между личностью и ее шапкой Φ_2 з, ни те, что между Φ_2 и Φ_1 з. Утверждения, сделанные на рисунке A5 легко проверяются:

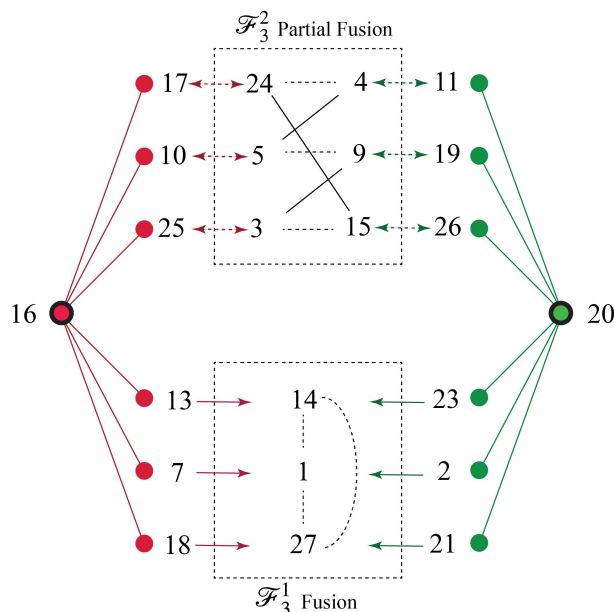


Рисунок A5. Шапки — их динамика в M_3 . Сплошные линии и стрелки — края M_3 , пунктирные - нет. Одиночные сплошные стрелки указывают на то, что степени хвостовой матрицы становятся головной матрицей. Например, $13_n = 14, n \geq 2$. Двойные штриховые стрелки указывают на то, что степени матриц 16 и 20 чередуются между собой и матрицей частичного слияния на другом конце. Например, $11_{2n+1} = 11$ и $11_{2n} = 4$.

Теорема A1. Динамика между шапками и многогранником слияния такая же, как на рисунке A5.

Приложение А.3. Доказательства

Доказательство предложения А1. Предположим, что две вершины различаются положением единичной записи в некоторой строке. Тогда легко видеть, что данная выпуклая комбинация этих двух вершин не может быть также выпуклой комбинацией любой другой пары вершин. Таким образом, их выпуклая оболочка является 1-гранью или ребром марковского многогранника.

Обратно, предположим, что две вершины V_1, V_2 различаются двумя рядами. WLOG, мы можем считать это строками 1 и 2. Пусть d_{ij} ряд V_j , $j, d_{ij} = 1, 2$ будет 1×3 -строчный вектор r_{ij} предположим $r_{11} b = r_{21} i r_{12} b = r_{22}$. Позволять V_3 быть матрицей, равной V_1 , за исключением его *фисначала* r_{11} и пусть V_4 быть матрицей, равной V_1 , за исключением его *второй* r_{12} (пример приведен в уравнениях (A2) и (A3) выше). Позволять V_5 быть выпуклой комбинацией $V' = xV_1 + (1 - Икс)V_2$, с $Икс \geq 1/2$. Затем, V_5 является также выпуклой оболочке V_1, V_3 , и V_4 : решение для $V' = ИксV_1 + йV_3 + (1 - Икс - й)V_2$, мы получаем $й = 1 - Икс i Икс = 2x - 1$. Наше утверждение будет проверено, если мы сможем показать, что $0 \leq Икс, й \leq 1$. Однако, $Икс \geq 1/2 \Rightarrow Икс \geq й \geq 0$ и $Икс \leq 1 \Rightarrow Икс \leq 1$. Аналогичное соображение применимо и к случаю $Икс \leq 1/2$, и в этом случае мы видим, что V_5 теперь также является выпуклой комбинацией V_2, V_3 , и V_4 . В любом случае, V_5 не находится на грани. \square

Доказательство предложения А2. (добавлена новая строка перед маркером)

- *0-граней или вершины.* матрица V имеет 6 нулевых записей, если у него есть три строки единиц, каждая из которых имеет три возможности для записи единиц: имеется 27 вершин.
- *1-границ, или края.* 5 нулевых записей можно распределить, выбрав строку с одним нулем тремя способами, выбрав позицию этой нулевой записи тремя способами, а затем выбрав места в двух других строках для их единицы измерения тремя способами каждый: всего 81 края.
- *2-ликий.* один из способов, которым набор вершин может иметь 4 общих нулевых элемента, заключается в том, что все они имеют по два фиксированных нуля в каждой из двух строк (3 способа выбрать эту пару строк). Нулевое размещение, эквивалентное вводу единицы измерения, в каждой из этих строк можно выбрать тремя способами. Таким образом, есть $3 \times 3 = 27$ треугольных граней.

Как только этот выбор сделан, набор генерирует *Треугольное лицо*, поскольку единицу измерения в оставшейся строке можно выбрать ровно тремя способами, и все полученные вершины будут смежными по предложению А1. Каждая вершина примыкает к трем отдельным треугольным граням, по одной для каждой строки, где сдвигается запись единицы измерения. Поскольку таких выделенных строк три, существует три различных треугольника, включая эту вершину. Таким образом, никакие два треугольника не могут примыкать друг к другу (еще один способ убедиться в том, что существует 81 треугольник, — заметить, что каждая из 27 вершин принадлежит трем треугольникам, и все треугольники различны). *Квадраты.* другой способ, которым набор вершин будет иметь 4 общих нулевых элемента, — это если все они имеют

два ряда (3×3 способа выбрать эту пару строк) по одному нулю в каждой (3 способа чтобы расположить ноль в каждой строке), а оставшуюся строку с двумя нулями (3 способа расположить эти нули). Таким образом, таких лиц 81.

Каждая из квадратных граней будет выпуклой оболочкой четырех вершин, которые получаются следующим образом: вызовем одну из вершин V_1 и разреши V_2 быть вершиной, отличной от V_1 в *оба* ряда. Выберите одну из выделенных строк с одним нулем и пусть V_3 — вершина, полученная сдвигом V_1 запись единицы измерения в этой строке, на ее позицию в V_2 . Позволять V_4 быть вершиной, полученной из V_1 путем смещения записи единицы измерения в *другой* выдающийся ряд по сравнению с V_2 . По предложению А1 существуют ребра между V_1 и V_3, V_1 и V_4, V_3 и V_2 , и V_4 и V_2 никаких других ребер: полученная фигура, имеющая (см. пример А1) два свободных параметра, действительно является двумерным квадратом.

Учитывая произвольную вершину, есть 3 способа выбрать две ее строки и 4 способа изменить положение одной или обеих записей единиц в этих двух строках. Таким образом, любая заданная вершина будет лежать на 12 клетках.

- *3-ликий.* наборы вершин с тремя общими нулями могут возникать двумя способами: их общие три нуля лежат в двух строках: одна с двумя нулями, другая с одним. Выберите ряд с 2 нулями тремя способами и расположите 2 нуля тремя способами. Затем выберите строку с 1 нулем двумя способами и положение нуля тремя способами; таких лиц 54.

Такой набор будет иметь 6 вершин, так как есть две возможные позиции для ввода единицы в строке с одним нулем и три в строке без общих нулей. В примере 1 показано, как увидеть, что результирующая фигура, созданная этими 6 вершинами, является *Треугольная призма*, как на рисунке А3.

Сходным образом, *кубики* генерируются 8 вершинами, по одному нулю в каждой из трёх строк; есть $3 \times 3 \times 3 = 27$ кубиков.

- *4-ликий*, или *ребь* имеют две общие нулевые записи: когда они находятся в *такой* жеряд, оставшиеся два ряда свободны, поэтому их $3 \times 3 = 9$ вершин в такой грани. Выделите тремя способами ряд с двумя общими нулями и расставьте эти нули тремя способами: таких граней 9.

Когда 2 общих нулевых записи находятся в *двух другой* строк, мы получаем *12 вершинная грань*, так как есть $2 \times 2 \times 3 = 12$ способов распределить записи единиц в строках. Выберите две выделенные строки тремя способами и распределите два общих нуля тремя способами. Таких лиц, таким образом, 27.

- *5-гранный*, или *грань* это 18-вершинные грани ($18 = 2 \times 3 \times 3$) с 1 общей нулевой записью. Есть $3 \times 3 = 9$ таких граней.

□

Доказательство предложения А3.

(i) Стохастическая матрица ранга 1 *вопрос* тот, чьи строки имеют одинаковое стационарное распределение, сказать $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$. Таким образом *вопрос* $= \sum_{j=1}^n \mu_j e_j$. Поскольку каждый ряд *вопрос* равно μ и его d_j столбец d_j , где 1 является столбцом всех единиц, мы получаем

$$(\text{вопрос})_{ij} = \mu_j \left(\sum_{k=1}^n \mu_k \right) = \mu_j$$

Другими словами, *вопрос* $=$ *вопрос*: стохастические матрицы ранга 1 идемпотентны и поэтому составляют Φ_n .

- (ii) Это можно проверить по рисунку А2 что Φ_3 , идемпотентные вершины ранга 2 составляют вершину личности и что это граница шестиугольника, состоящего из шести линейных сегментов между ними (три из которых являются ребрами шестиугольника). M_3 и три являются его внутренними (Быстрый способ проверить, что любой сегмент между идемпотентными матрицами A, B является идемпотентным, нужно доказать, что это так, если их антикоммутирует $\{A, B\} = AB + BA$ - бакалавр равно $A+B$).

Доказательство леммы А1. *вопрос* можно рассматривать как линейный (и, следовательно, непрерывный) оператор на \mathbb{R}^n , которая ограничивается непрерывной функцией из выпуклого множества вероятностных мер на $\mathbb{R}^n = \{1, \dots, n\}$ к самому себе. Теорема Брауэра о неподвижной точке тогда утверждает, что существует неподвижная точка непрерывного отображения. *вопрос* выпуклого множества вероятностных мер на $\mathbb{R}^n = \{1, \dots, n\}$ к самому себе: эта фиксированная точка и есть то, что подразумевается под стационарным распределением. □

Доказательство теоремы А1. Пункты (i), (ii) и (iii) просты. Напомним, что стохастическая матрица с параметрами I, K, γ дан кем-то

$$\begin{bmatrix} 1-I & K \\ \gamma & 1-\gamma \end{bmatrix}$$

с $I, K, \gamma \in [0, 1]$.

- (iv) Исправление $\rho = (I, \gamma)$ в единичном квадрате, кроме углов (0, 0) и (1, 1). Точки на линии между началом координат и ρ может быть параметризован как $\rho_a = (aI, a\gamma)$ (топору, даю). Расчет показывает, что

$$\left(\text{вопрос}(\rho_a) \text{вопрос}(\rho) = \text{вопрос}(\rho) \right)$$

Таким образом $\text{вопрос}(\rho_a) \text{вопрос}(\rho) = \text{вопрос}(\rho)$, где $\rho = (I, \gamma)$, $\rho_a = (aI, a\gamma)$, $a \in [0, 1]$. Итерация приведенной выше формулы, начиная с ρ , мы видим, что последовательность $(\text{вопрос}(\rho))_n$ $\rightarrow \rho$ остается на этой линии. Предполагать ρ это к

справа от поперечной диагонали $I_{k \times k} + I = 1$. По нашему параметру поперечная диагональ пересекается в $a = \frac{1}{I_{k \times k} + I}$. Приведет к значению, что если $a > \frac{1}{I_{k \times k} + I}$, наша формула показывает, что $I_{k \times k} < \text{топорий} < \text{дао}$: π смещается из положительное расстояние. Происхождение. Аналогично, когда она находится слева от $I_{k \times k} + I = 1$, так что $a < \frac{1}{I_{k \times k} + I}$, затем π сдвинут прочь от происхождения. В любом случае последовательность $(\text{вопрос}(\pi))_{n \in \mathbb{N}}$ является строго монотонный в сторону поперечная диагональ, если только она на самом деле не находится на ней, где матрица $\text{вопрос}(I_{k \times k}, I)$ является стационарным.

□

Приложение Б. Декорированные перестановки для 27 вершин марковского многогранника M_3

Число	Матрица	Украшенная перестановка
1	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	[4, 2, 3]
2	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	[4, 2, 3]
3	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	[4, 2, 6]
4	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	[4, 5, 3]
5	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	[4, 5, 3]
6	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	[4, 5, 6]
7	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	[4, 2, 3]
8	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	[4, 3, 5]
9	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	[4, 2, 6]
10	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	[2, 4, 3]
11	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	[2, 4, 3]
12	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	[2, 4, 6]

Число	Матрица	Украшенная перестановка
13	$\begin{matrix} - & 0 & 1 & 0 \\ - & 0 & 1 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 \end{matrix}$	[1, 5, 3]
14	$\begin{matrix} - & 0 & 1 & 0 \\ - & 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 1 & 0 \end{matrix}$	[1, 5, 3]
15	$\begin{matrix} - & 0 & 1 & 0 \\ - & 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$	[1, 5, 6]
16	$\begin{matrix} - & 0 & 1 & 0 \\ - & 0 & 0 & 1 \\ & 1 & 0 & 0 \end{matrix}$	[3, 4, 5]
17	$\begin{matrix} - & 0 & 1 & 0 \\ - & 0 & 0 & 1 \\ & 0 & 1 & 0 \end{matrix}$	[1, 3, 5]
18	$\begin{matrix} - & 0 & 1 & 0 \\ - & 0 & 0 & 1 \\ & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$	[1, 2, 6]
19	$\begin{matrix} - & 0 & 0 & 1 \\ - & 1 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 \end{matrix}$	[3, 2, 4]
20	$\begin{matrix} - & 0 & 0 & 1 \\ - & 1 & 0 & 0 \\ & 0 & 1 & 0 \end{matrix}$	[3, 4, 5]
21	$\begin{matrix} - & 0 & 0 & 1 \\ - & 1 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$	[1, 2, 6]
22	$\begin{matrix} - & 0 & 0 & 1 \\ - & 0 & 1 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 \end{matrix}$	[3, 5, 4]
23	$\begin{matrix} - & 0 & 0 & 1 \\ - & 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 1 & 0 \end{matrix}$	[1, 5, 3]
24	$\begin{matrix} - & 0 & 0 & 1 \\ - & 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$	[1, 5, 6]
25	$\begin{matrix} - & 0 & 0 & 1 \\ - & 0 & 0 & 1 \\ & 1 & 0 & 0 \end{matrix}$	[3, 2, 4]
26	$\begin{matrix} - & 0 & 0 & 1 \\ - & 0 & 0 & 1 \\ & 0 & 1 & 0 \end{matrix}$	[1, 3, 5]
27	$\begin{matrix} - & 0 & 0 & 1 \\ - & 0 & 0 & 1 \\ & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$	[1, 2, 6]

Рекомендации

1. Синьорелли, КМ; Щотка, Дж.; Прентнер, Р. Объяснительные профили моделей сознания - к систематической классификации. *Неврология. Сознательный*. 2021 год, 2021 год, ниаб021. [[Перекрестная ссылка](#)] [[ПабМед](#)]
2. Хамерофф, С.Р.; Пенроуз Р. Сознание во Вселенной. Обзор теории «Orch OR». *Физ. Жизнь преп.* 2014 год, 11, 39–78. [[Перекрестная ссылка](#)] [[ПабМед](#)]
3. Хамерофф С.Р. Квантовые вычисления в микротрубочках мозга? Модель сознания Пенроуза-Хамерова «Орх ИЛИ». *Филос. Пер. Р. Сок. А* 1998 год, 356, 1869–1896. [[Перекрестная ссылка](#)]
4. Пенроуз, Р. *Тени разума: поиск недостающей науки о сознании*, Издательство Оксфордского университета: Нью-Йорк, штат Нью-Йорк, США, 1994.
5. Оидзуми, М.; Альбантакис, Л.; Тонони, Г. От феноменологии к механизмам сознания: интегрированная теория информации 3.0. *ПЛОС Компьютер. Биол.* 2014 год, 10, e1003588. [[Перекрестная ссылка](#)] [[ПабМед](#)]
6. Тонони, Г.; Боли, М.; Массимини, М.; Кох, К. Интегрированная теория информации: от сознания к его физическому субстрату. *Нат. Преподобный Нейроски.* 2016 год, 17, 450–461. [[Перекрестная ссылка](#)]
7. Хаун, А.; Тонони, Дж. Почему пространство ощущается именно так? К принципиальному учету пространственного опыта. *Энтропия* 2019 год, 21, 1160. [[Перекрестная ссылка](#)]
8. Барбоза, Л.С.; Маршалл, В.; Альбантакис, Л.; Тонони, Г. Механизм интегрированной информации. *Энтропия* 2021 год, 23, 362. [[Перекрестная ссылка](#)]
9. Баарс, Би Джей *Когнитивная теория сознания*, Издательство Кембриджского университета: Нью-Йорк, штат Нью-Йорк, США, 1988.
10. Баарс, Би Джей *В Театре Сознания*, Издательство Оксфордского университета: Нью-Йорк, штат Нью-Йорк, США, 1997.
11. Деэн, С.; Наккаш, Л. На пути к когнитивной нейробиологии сознания: основные данные и структура рабочего пространства. *Познание* 2001 г., 79, 1–37. [[Перекрестная ссылка](#)]
12. Машур, Джорджия; Рулфсема, П.; Чанжу, Япония; Деэн, С. Сознательная обработка данных и гипотеза глобального рабочего пространства нейронов. *Нейрон* 2020 год, 105, 776–798. [[Перекрестная ссылка](#)]
13. Деннетт, округ Колумбия *Объяснение сознания*, Little, Brown & Company: Бостон, Массачусетс, США, 1991.
14. Франкиш К. (Ред.) *Иллюзионизм как теория сознания*, Выходные данные Academic: Эксетер, Великобритания, 2017.
15. Грациано, *MSA Переосмысление сознания: научная теория субъективного опыта*, W&W Norton: Нью-Йорк, штат Нью-Йорк, США, 2019.
16. Стросон Г. Реалистический монизм: почему физикализм влечет за собой панпсихизм. В *Сознание и его место в природе. Влечёт ли физикализм панпсихизм?* Фриман, А., Ред.; Выходные данные Академический: Эксетер, Великобритания, 2006 г.; стр. 3–31.
17. Чалмерс, Д. Д. Панпсихизм и панпротопсихизм. В *Сознание в физическом мире: взгляды на расселовский монизм*, Альтер Т., Нагасава Ю., ред.; Издательство Оксфордского университета: Нью-Йорк, штат Нью-Йорк, США, 2015 г.; стр. 246–276.
18. Поппер, КР; Экклс, Джей Си *Самость и ее мозг: аргумент в пользу интеракционизма*, Шпрингер: Берлин, Германия, 1977.
19. Бек, Ф.; Экклс, Дж. Квантовые аспекты активности мозга и роль сознания. *Учеб. Натл. акад. наук. США* 1992 год, 89, 11357–11361. [[Перекрестная ссылка](#)]
20. Гофф, П. *Сознание и фундаментальная реальность*; Издательство Оксфордского университета: Оксфорд, Великобритания, 2017.
21. Прентнер Р. Естественная философия опыта. *Философия* 2018 год, 3, 35. [[Перекрестная ссылка](#)]
22. Аркани-Хамед, Н.; Буржайли, Дж.; Качасо, Ф.; Гончаров А.; Постников А.; Трнка, Я. *Грассманова геометрия амплитуд рассеяния*; Издательство Кембриджского университета: Кембридж, Великобритания, 2016.
23. Аркани-Хамед, Н.; Бенинкаса, П. О возникновении лоренц-инвариантности и унитарности из аспекта рассеяния космологических многогранников. *arXiv* 2018 год, arXiv:1811.01125.
24. Аркани-Хамед, Н.; Хуанг, ТС; Хуанг, Ю.Т. Амплитуды рассеяния для всех масс и спинов. *arXiv* 2021 год, arXiv:1709.04891. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1709.04891>.
25. Гросс Д. Эйнштейн и поиск объединения. *Курс. наук.* 2005 г., 89, 2035–2040 гг.
26. Массер Г. Пространство-время обречено. В *Пространство, время и пределы человеческого понимания*; Вупулури С., Гирарди Г.К., ред.; Springer: Чам, Швейцария, 2017 г.; стр. 217–227.
27. Аркани-Хамед, Н. Будущее фундаментальной физики, 2010. Корнеллские мессенджерские лекции. Доступно онлайн: <https://www.youtube.com/watch?v=SWWBUHszyD8> (по состоянию на 8 января 2023 г.).
28. Аркани-Хамед, Н. Лекция № 1, Пространство-время и квантовая механика, Тотальная позитивность и мотивы, 2019. Серия лекций в Гарвардском университете. Доступно онлайн: https://www.youtube.com/watch?v=Sn0W_mwA7Q0 (по состоянию на 8 января 2023 г.).
29. Шнайдер, С. *Возникновение пространства-времени, панпсихизм и природа сознания*; Scientific American: Нью-Йорк, штат Нью-Йорк, США, 2018.
30. Фодор, Дж. *Разум так не работает: возможности и ограничения вычислительной психологии*; MIT Press: Кембридж, Массачусетс, США, 2000.
31. Черчленд, П.С. Эпистемология в эпоху нейробиологии. *Дж. Филос.* 1987 год, 84, 544–555. [[Перекрестная ссылка](#)]
32. Пинкер, С. *Как работает разум*; WW Norton: Нью-Йорк, штат Нью-Йорк, США, 1999.
33. Пинкер С. Так как же работает разум? *Ум Ланг.* 2005 г., 20, 1–24. [[Перекрестная ссылка](#)]
34. Хоффман, Д.Д.; Сингх, М.; Пракаш, К. Интерфейсная теория восприятия. *Психон. Бык. Преподобный.* 2015 год, 22, 1480–1506. [[Перекрестная ссылка](#)]
35. Марк, Дж. Т.; Мэрион, ВВ; Хоффман Д.Д. Естественный отбор и достоверные представления. *Дж. Теория. Биол.* 2010 год, 266, 504–515. [[Перекрестная ссылка](#)]
36. Пракаш, К.; Стивенс, К.Д.; Хоффман, Д.Д.; Сингх, М.; Филдс, К. Фитнес побеждает истину в эволюции восприятия. *Акта Биотеор.* 2021 год, 69, 319–341. [[Перекрестная ссылка](#)]
37. Пракаш, К.; Филдс, К.; Хоффман, Д.Д.; Прентнер, Р.; Сингх, М. Факт, вымысел и фитнес. *Энтропия* 2020 год, 22, 514. [[Перекрестная ссылка](#)]
38. Филдс, К. Этот мир без границ. В *Мозг, Разум, Космос*, Чопра, Д., Ред.; Чопра: Ла Коста, Калифорния, США, 2014 г.; Глава 13.
39. Хоффман, Д.Д. *Визуальный интеллект: как мы создаем то, что видим*; WW Norton: Нью-Йорк, штат Нью-Йорк, США, 1998.

40. Хоффман Д.Д. Интерфейсная теория восприятия. В *Категоризация объектов: перспективы компьютерного и человеческого зрения*, Дикинсон С., Тарр М., Леонардис А., Шиле Б., ред.; Издательство Кембриджского университета: Нью-Йорк, штат Нью-Йорк, США, 2009 г.; стр. 148–165.
41. Хоффман Д.Д. Конструирование визуальной реальности. В *Галлюцинации: теория и практика*; Блом Дж., Sommer И., ред.; Спрингер: Нью-Йорк, штат Нью-Йорк, США, 2011 г.; стр. 7–15.
42. Хоффман Д.Д. Сенсорный рабочий стол. В *Это делает вас умнее: новые научные концепции, которые улучшат ваше мышление*; Брокман, Дж., Ред.; Harper Perennial: Нью-Йорк, Нью-Йорк, США, 2012 г.; стр. 135–138.
43. Хоффман Д.Д. Публичные объекты и частные квалиа: сфера применения и пределы психофизики. В *Справочник по экспериментальной феноменологии*; Альбертацци, Л., редактор; John Wiley & Sons: Хобокен, Нью-Джерси, США, 2013 г.; стр. 71–90.
44. Хоффман, Д.Д.; Сингх, М.; Марк, Дж.Т. Благоприятствует ли эволюция истинному восприятию? В *Человеческое зрение и электронная визуализация XVIII*; Роговиц Б.Е., Паппас Т.Н., де Риддер Х., ред.; Международное общество оптики и фотоники, SPIE: Беллингем, Вашингтон, США, 2013 г.; Том 8651, с. 865104. [[Перекрестная ссылка](#)]
45. Кендеринк, Дж. Дж. Мир, окружающая среда, Umwelt и внутренний мир: биологический взгляд на зрительное осознание. В *Человеческое зрение и электронная визуализация XVIII*; Роговиц Б.Е., Паппас Т.Н., де Риддер Х., ред.; Международное общество оптики и фотоники, SPIE: Беллингем, Вашингтон, США, 2013 г.; Том 8651, с. 865103. [[Перекрестная ссылка](#)]
46. Кендеринк, Дж. Дж. Всевидящее око? *Восприятие* 2014 год, 43, 1–6. [[Перекрестная ссылка](#)] [[ПабМед](#)]
47. Маусфельд Р. Физикалистская ловушка в теории восприятия. В *Восприятие и физический мир: психологические и философские проблемы восприятия*; Хейер Д., Маусфельд Р. (ред.); Уайли: Нью-Йорк, штат Нью-Йорк, США, 2002 г.; стр. 75–112.
48. фон Икскуль, Дж. *Umwelt und Innenwelt der Tiere*; Шпрингер: Берлин, Германия, 1909 г.
49. фон Икскуль, Дж. *Теоретическая биология*; Харткорт, Брейс и компания: Нью-Йорк, штат Нью-Йорк, США, 1926 г.
50. фон Икскуль, Дж. Прогулка по мирам животных и людей: Книга с картинками невидимых миров. В *Инстинктивное поведение: развитие современной концепции*; Hallmark Press: Нью-Йорк, штат Нью-Йорк, США, 1957.
51. Филдс, К.; Хоффман, Д.Д.; Пракаш, К.; Прентнер, Р. Собственные формы, интерфейсы и голографическое кодирование. *Констр. Найденный* 2017 год, 12, 265–291.
52. Хелд Р.; Островский Ю.; де Гелдер, Б.; Ганди, Т.; Ганеш, С.; Матур, У.; Синха, П. Новозрячие не соответствуют увиденному с ощущением. *Наг. Неврология* 2021 год, 14, 551–553. [[Перекрестная ссылка](#)]
53. Берке, М.; Уолтер-Терилл, Р.; Хара-Эттингер, Дж.; Шолль, Б. Гибкие цели требуют, чтобы негибкие системы восприятия создавали достоверные представления: последствия для реализма, выявленные с помощью эволюционного моделирования. *Когн. наук* 2022 год, 46, e13195. [[Перекрестная ссылка](#)] [[ПабМед](#)]
54. Джустина, М.; Верстег, МАМ; Венгерровский, С.; Ханштайнер, Дж.; Хохрайнер, А.; Фелан, К.; Штайнлехнер, Ф.; Кофлер Дж.; Ларссон, Дж.А.; Абеллан, К.; и другие. Проверка теоремы Белла со запутанными фотонами без существенных лазеек. *Физ. Преподобный Летт.* 2015 год, 115, 250401. [[Перекрестная ссылка](#)] [[ПабМед](#)]
55. Грёблакер, С.; Патерек, Т.; Кальтенбек, Р.; Брукнер, Ч.; Жуковский, М.; Аспельмейер, М.; Цайлингер, А. Экспериментальная проверка нелокального реализма. *Природа* 2007 год, 446, 871–875. [[Перекрестная ссылка](#)] [[ПабМед](#)]
56. Хенсен, Б.; Берниен, Х.; Дрео, А.; Райзерер, А.; Калб, Н.; Блок, М.С.; Руитенберг, Дж.; Вермюлен, RFL; Схаутен, Р.Н.; Абеллан, С.; и другие. Нарушение неравенства Белла без лазеек с использованием спинов электронов, разделенных на 1,3 километра. *Природа* 2015 год, 526, 682–686. [[Перекрестная ссылка](#)]
57. Эдельман, Г. *Шире неба: феноменальный дар сознания*; Издательство Йельского университета: Нью-Хейвен, Коннектикут, США, 2004.
58. Локк, Дж. *Эссе о человеческом понимании*; Тхо Бассет: Лондон, Великобритания, 1690 г.
59. Кант, И. *Пролегомены ко всякой будущей метафизике. С отрывками из критики чистого разума*; Издательство Кембриджского университета: Кембридж, Великобритания, 1997.
60. Хоффман, Д.Д.; Пракаш, К. Объекты сознания. *Передний. Психол.* 2014 год, 5, 577. [[Перекрестная ссылка](#)]
61. Филдс, К.; Хоффман, Д.Д.; Пракаш, К.; Сингх, М. Сети сознательных агентов: формальный анализ и применение к познанию. *Когн. Сист. Рез.* 2018 год, 47, 186–213. [[Перекрестная ссылка](#)]
62. Баарс, Б.Дж. Гипотеза сознательного доступа: происхождение и недавние доказательства. *Тенденции Когн. наук* 2002 г., 6, 47–52. [[Перекрестная ссылка](#)]
63. Деэн, С. *Сознание и мозг: расшифровка того, как мозг кодирует наши мысли*; Викинг: Нью-Йорк, штат Нью-Йорк, США, 2014.
64. Тонони, Г. Сознание как интегрированная информация: предварительный манифест. *Биол. Бык.* 2008 год, 215, 216–242. [[Перекрестная ссылка](#)]
65. Лейбниц, Г.В. *Рассуждение о метафизике и монадологии*; Дувр: Минеола, Нью-Йорк, США, 2005 г.
66. Аتمانспачер, Х. Гипотеза Паули-Юнга и ее родственники: формально дополненное описание. *Откройте Филос.* 2020 год, 3, 527–549. [[Перекрестная ссылка](#)]
67. Чеккерини-Зильберштейн, Т.; Корнарт, М. *Клеточные автоматы и группы*; Springer: Берлин, Германия, 2010. [[Перекрестная ссылка](#)]
68. Кук М. Универсальность в элементарных клеточных автоматах. *Комплексная система* 2004 г., 15, 1–40.
69. Прентнер, Р. Доктор Гофф, Снесите эту стену! Теория интерфейса восприятия и наука о сознании. *Дж. Сознательное. Стад.* 2021 год, 28, 91–103. [[Перекрестная ссылка](#)]
70. Марискаль К. Жизнь. В *Стэнфордская энциклопедия философии*, изд. Зима 2021 г.; Залта, Э.Н., Ред.; Лаборатория метафизических исследований, Стэнфордский университет: Стэнфорд, Калифорния, США, 2021.
71. Бэгвелл, Дж. Н. Обычные объектные убеждения и научная теория. Кандидат наук. Диссертация, Калифорнийский университет, Санта-Барбара, Калифорния, США, 2022 г. Доступно онлайн: <https://escholarship.org/uc/item/9d8413x3> (по состоянию на 8 января 2023 г.).
72. Сигер, В. Сознание, информация и панпсихизм. *Дж. Сознательное. Стад.* 1995 год, 2, 272–288.
73. Гофф П. Почему панпсихизм не помогает нам объяснить сознание. *Диалектика* 2009 год, 63, 289–311. [[Перекрестная ссылка](#)]

74. Сигер, В.Е. Панпсихизм, агрегация и комбинаторная инфузия. *Разум имеет значение* 2010 год, 8, 167–184.
75. Коулман С. Реальная проблема комбинации: панпсихизм, микросубъекты и эмерджентность. *Эркеннтни* 2014 год, 79, 19–44. [Перекрестная ссылка]
76. Мёрх, Х. Х. Панпсихизм и причинность: новый аргумент и решение проблемы комбинации. Кандидат наук. Диссертация, Университет Осло, Осло, Норвегия, 2014 г. Доступно онлайн: <https://philpapers.org/archive/HASPAC-2.pdf> (по состоянию на 8 января 2023 г.).
77. Чалмерс, Д. Д. Проблема комбинирования панпсихизма. В *Панпсихизм: философские очерки*, Брюнtrup Г., Яколла Л., ред.; Издательство Оксфордского университета: Оксфорд, Великобритания, 2016 г.; стр. 19–47.
78. Гофф, П. *Ошибка Галилея. Основы новой науки о сознании*, Винтажные книги: Нью-Йорк, штат Нью-Йорк, США, 2019.
79. Рулофс, Л. *Объединение умов: как думать о сложной субъективности*, Издательство Оксфордского университета: Оксфорд, Великобритания, 2019.
80. Д'Ариано, генеральный менеджер; Фаггин, Ф. Трудная проблема и свобода воли: теоретико-информационный подход. *arXiv* 2021 год, arXiv:2012.06580v2.
81. Шредингер, Э. *Разум и материя*, Издательство Кембриджского университета: Кембридж, Великобритания, 1958.
82. Авторы нЛаб. Теорема Кантора. 2022. Доступно онлайн: <http://ncatlab.org/nlab/show/Cantor%27s%20theorem> (по состоянию на 8 января 2023 г.).
83. Гофф П. Сознание превышает все: ответы критикам. *Дж. Сознательное. Стад* 2021 год, 40, 289–328. [Перекрестная ссылка]
84. Парк, С.; Тейлор, Т. Амплитуда для n -глюонное рассеяние. *Физ. Преподобный Летт.* 1986 год, 56, 2459. [Перекрестная ссылка] [ПабМед]
85. Уильямс Л. Положительный Грассманиан, амплитуды и кластерные алгебры. *arXiv* 2022 год, arXiv:2110.10856v2.
86. Хартнет, К. *Неожиданное путешествие математика по физическому миру*, Журнал Quanta: Нью-Йорк, штат Нью-Йорк, США, 2020.
87. Постников А.; Шпейер, Д.; Уильямс, Л. Соответствующие многогранники, торическая геометрия и полностью неотрицательный грассманиан. *arXiv* 2008 год, arXiv:0706.2501v3.
88. Аркани-Хамед, Н.; Малдасена, Дж. Физика космологического коллаидера. *arXiv* 2015 год, arXiv:1503.08043v1.
89. Норрис, Дж. *Марковские цепи*, Издательство Кембриджского университета: Кембридж, Великобритания, 1997.
90. Кортил, С.; Уильямс, Л. Комбинаторные таблицы для процесса асимметричного исключения. *Адв. Прил. Математика* 2007 год, 39, 293–310. [Перекрестная ссылка]
91. Кодама, Ю.; Уильямс, Л. КП, солитоны и полная положительность грассманиана. *Изобретать. Математика* 2014 год, 198, 637–699. [Перекрестная ссылка]
92. Кларк С. Почему Эйнштейн так и не получил Нобелевскую премию по теории относительности. *Хранитель*, 8 октября 2012 г.
93. Беккер, К.; Беккер, М.; Шварц, Дж. *Теория струн и М-теория: современное введение*, Издательство Кембриджского университета: Нью-Йорк, штат Нью-Йорк, США, 2007.
94. Ровелли, К. *Квантовая гравитация*, Издательство Кембриджского университета: Нью-Йорк, штат Нью-Йорк, США, 2004 г.
95. Даукер Ф. Введение в причинные множества и их феноменологию. *Генерал Относительный. Гравит.* 2013, 45, 1651–1667. [Перекрестная ссылка]
96. Прентнер Р. Основы критических материалистов. *Разум имеет значение* 2014 год, 12, 93–118.
97. Пинкер, С. *Просвещение сегодня: аргументы в пользу разума, науки, гуманизма и прогресса*, Винкинг: Нью-Йорк, штат Нью-Йорк, США, 2018.
98. Чехол, ТМ; Томас, Дж. *Элементы теории информации*, 2-е изд.; Уайли: Хобокен, Нью-Джерси, США, 2006 г.
99. Прайс, Х. *Стрела времени и точка Архимеда: новые направления физики времени*, Издательство Оксфордского университета: Оксфорд, Великобритания, 1996.
100. Ровелли, К. Перспективна ли «Стрела времени»? В *Философия космологии*, Чамчам К., Силк Дж., Барроу Дж.Д., Сондерс С., ред.; Издательство Кембриджского университета: Кембридж, Великобритания, 2017 г.; стр. 285–296.
101. Грюнбаум, Б. *Выпуклые многогранники*, Спрингер: Нью-Йорк, штат Нью-Йорк, США, 2003 г.
102. Зиглер, генеральный менеджер *Лекции по многогранникам*, Спрингер: Нью-Йорк, штат Нью-Йорк, США, 1995.
103. Хенк, М.; Рихтер-Геберт, Дж.; Циглер, Г. Основные свойства выпуклых многогранников. В *Справочник по дискретной и вычислительной геометрии*, 3-е изд.; Гудман Дж., О'Рурк Дж., Тот, К.Д., ред.; CRC Press: Бока-Ратон, Флорида, США, 2017 г.; Глава 15.

Отказ от ответственности/Примечание издателя: Заявления, мнения и данные, содержащиеся во всех публикациях, принадлежат исключительно отдельному автору(ам) и соавторам(ам), а не MDPI и/или редактору(ам). MDPI и/или редактор(ы) не несут ответственности за любой вред людям или имуществу, возникший в результате любых идей, методов, инструкций или продуктов, упомянутых в контенте.